



Fourier Applications

傅立葉表示法對混合訊號的應用

Lecture 4-1

1



Fourier Representations

DTFS: $x[n]$: discrete-time and periodic signal

$X[k]$: discrete and periodic spectrum

FS: $x(t)$: continuous-time and periodic signal

$X[k]$: discrete-time and non-periodic spectrum

DTFT: $x[n]$: discrete-time and non-periodic signal

$X(e^{j\Omega})$: continuous and periodic spectrum

FT: $x(t)$: continuous-time and non-periodic signal

$X(j\omega)$: continuous-time and non-periodic spectrum

2



Introduction

- 週期與非週期性訊號混合
 - 週期性時間訊號輸入與 非週期性時間系統脈衝響應
 - 週期性時間訊號直接應用 FT 公式時無法收斂
 - 如何用 FT 表示週期性時間訊號?
- 連續時間訊號與離散時間訊號混合
 - 連續時間取樣系統
 - 如何用 FT 表示離散時間訊號? 以 FT 代替 DTFT
 - 如何取樣連續時間訊號? 取樣間距?
 - 如何取樣離散時間訊號? 次取樣?

3



Objectives

- 討論 FT 如何用於週期性訊號
 - 建立 FT 與 FS 的關係
 - 建立 DTFT 與 DTFS 的關係
- 週期與非週期性訊號的褶積與乘積性質
 - 週期與非週期性訊號的 褶積
 - 週期與非週期性訊號的 乘積

4



(cont.)

- 討論 FT 如何用於離散時間性訊號
 - 建立 FT 與 DTFT 的關係
 - 建立 FT 與 DTFS 的關係
- 取樣 (Sampling)
 - 連續時間訊號的取樣
 - 離散時間訊號的取樣

5



(cont.)

- 從離散樣本重建連續時間性訊號
 - 取樣定理 (Sampling Theorem)
 - 理想的訊號重建 (Ideal Reconstruction)
 - 重建基本方法-零階保持器 (Zero-Order Hold)

6



(cont.)

- 連續時間性訊號的離散時間性處理
 - 基本離散時間性處理系統
 - 超取樣 (Over Sampling)
 - 十分法 (Decimation)
 - 內插法 (Interpolation)

7



(cont.)

- 有限時間非週期性訊號 FS 表示法
 - 建立 DTFS 與 DTFT 的關係
 - 建立 FS 與 FT 的關係
- FT 近似 DTFS
- 高效率 DTFS 演算法
 - 快速傅立葉轉換 (Fast Fourier Transform, FFT)

8



FT for Periodic Signals

討論 FT 如何用於週期性訊號- 建立 FT 與 FS 的關係

應用 常數 FT 結果為 脈衝: $1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi \delta(\omega)$

應用 頻率平移性質: $e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$

週期性訊號 $x(t)$ 的 FS \rightarrow FT 表示法:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

FS representation

FT representation

9



FT Review

if $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 1 \end{aligned}$$

if $x(t) = \delta(t)$,

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{j\omega t} d\omega = 1 \end{aligned}$$



FT Frequency-Shifting Review

$$\text{if } X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0),$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$



FT Time-Shifting Review

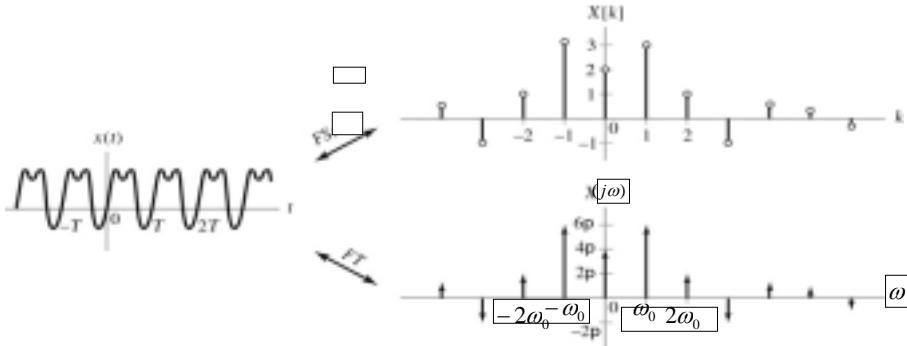
$$\text{if } x(t) = \delta(t - t_0),$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$



FS & FT Representation of Periodic Continuous-Time Signal

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$



不可直接用FT公式轉換；採用頻率位移性質



Example 4.1:

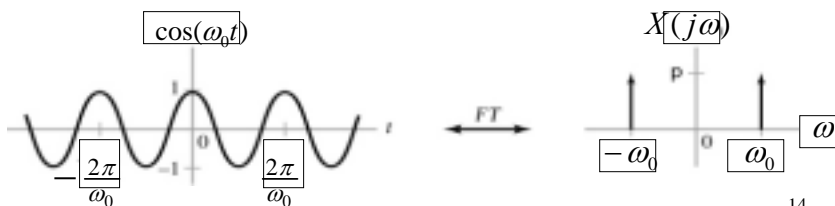
試求 $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ 的 FT 表示法

Solution:

$$\because e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2} 2\pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

$$= \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$





Example 4.2: 試求 $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$ 的 FT 表示法

Solution:

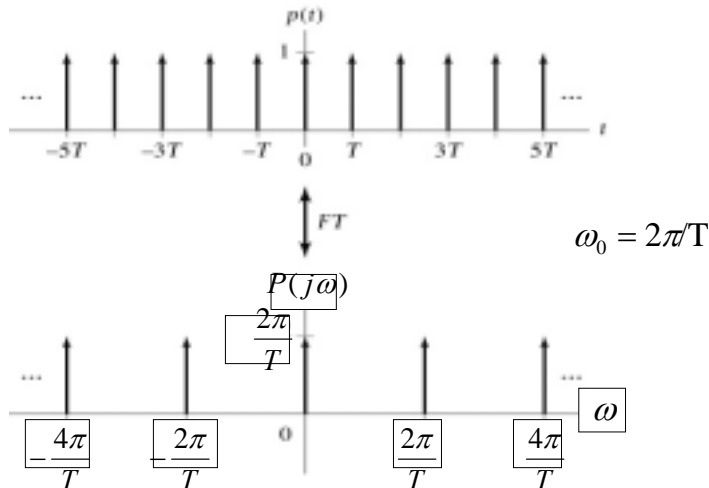
p(t) 的 FS 係數：
$$P[k] = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

p(t) 可表示成為：
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P[k] e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

FT 頻率平移性質：
$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

p(t) 的 FT：
$$p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

15



頻域中脈衝間距 與 時域中脈衝間距 成反比

16



Problem 4.1: 試求 $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ 的 FT 表示法

Solution:

尤拉公式表示：
$$x(t) = \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{j2} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{j2} e^{-j\omega_0 t}$$

x(t) 的 FS 係數：
$$X[k] = \begin{cases} \frac{1}{j2}, & k = +1 \\ -\frac{1}{j2}, & k = -1 \end{cases}$$

(由審視法 求出)

x(t) 可表示成為：
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{j2} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{j2} e^{-j\omega_0 t}$$

17



P 4.1 (cont.)

x(t) 可表示成為：
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{j2} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{j2} e^{-j\omega_0 t}$$

FT 頻率平移性質：
$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

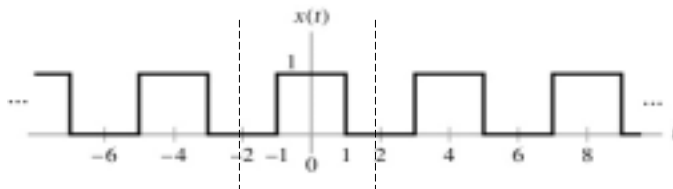
x(t) 的 FT：
$$\sin(\omega_0 t) \xleftrightarrow{FT} \frac{\pi}{j}\delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega + \omega_0)$$

學生請試將頻譜圖繪出？

18



Problem 4.1(b) 試求 下圖中方波的 FT 表示法



Solution: (請學生試做一做)

建議步驟：

(a) 求出 FS 表示法

(b) 應用 FT 平移法性質



DTFT for the Periodic Signals

討論 DTFT 如何用於週期性訊號-建立 DTFT 與 DTFS 的關係

N 週期訊號 $x[n]$ 的 DTFS 公式：
$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$

DTFT 頻率平移性質：
$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

DTFT 頻率分佈是週期 2π 的函數：(結合頻率平移性質)

$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - m2\pi)$$



DTFT Review

$$\text{if } x[n] = \delta[n],$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1$$

DTFT 頻率平移性質：

$$\text{if } X(e^{j\Omega}) = \delta(\Omega - k\Omega_0),$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - k\Omega_0) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n}$$

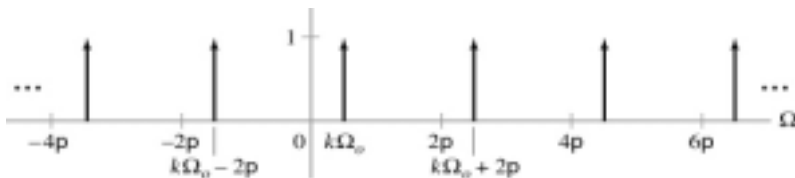
$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n} \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

21



DTFT 頻率分佈是週期 2π 的函數：(結合頻率平移性質)

$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n} \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - m2\pi)$$



22



N 週期訊號 $x[n]$ 的 DTFS 公式： $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$

$x[n]$ 的 DTFT： $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - m2\pi)$

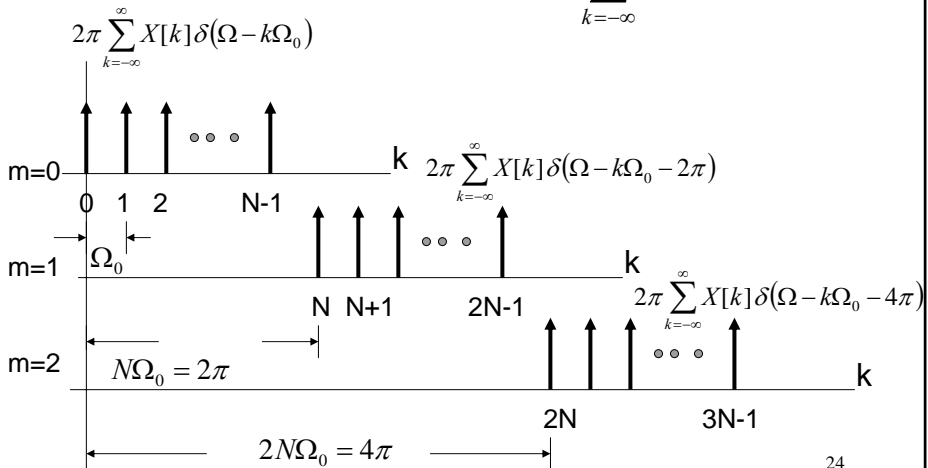
$X[k]$ 的週期為 N ，所以 $N\Omega_0 = N(2\pi/N) = 2\pi$ ，上式可簡化：

{ Hint: $X[k]$ 頻率位置：0 ~ $(N-1)\Omega_0$ 可以合併入 }

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

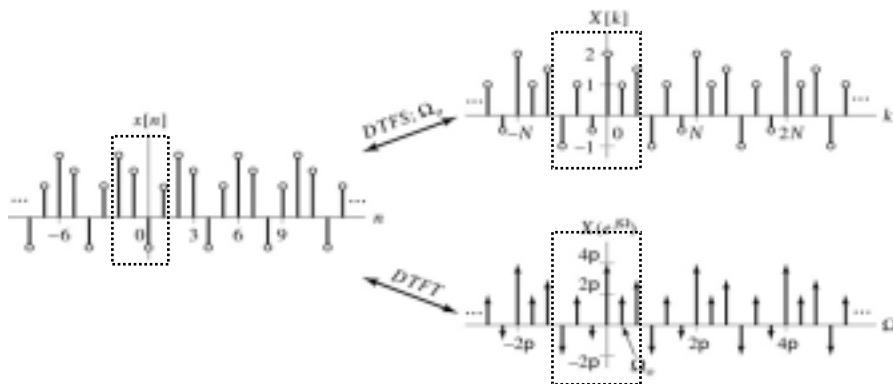


討論： $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0 - m2\pi)$
 $= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_0)$





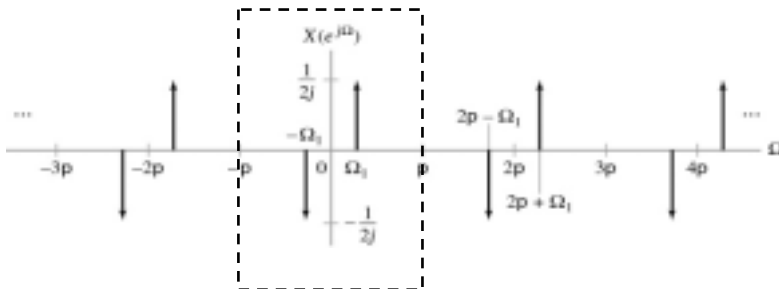
DTFS & DTFT Representations of Periodic Discrete-Time Signals



Example 4.3 試求下圖的 Inverse DTFT , $x[n] = ?$

(其中 $\Omega_1 = \pi/N$) \therefore

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{j2} \delta(\Omega - \Omega_1) - \frac{1}{j2} \delta(\Omega + \Omega_1), \quad -\pi < \Omega < \pi$$



DTFT of periodic signal for Example 4.3.



Solution: 由前圖中，可知一個週期內 $X(e^{j\Omega})$:

\therefore

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{j2} \delta(\Omega - \Omega_1) - \frac{1}{j2} \delta(\Omega + \Omega_1), \quad -\pi < \Omega < \pi$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} e^{j\Omega_1 n} \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \delta(\Omega - \Omega_1)$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{-j\Omega_1 n} \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} \delta(\Omega + \Omega_1)$$

$$\begin{aligned} \therefore x[n] &= \frac{1}{j2} \left(\frac{1}{2\pi} e^{j\Omega_1 n} - \frac{1}{2\pi} e^{-j\Omega_1 n} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2j} e^{j\Omega_1 n} - \frac{1}{2j} e^{-j\Omega_1 n} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sin(\Omega_1 n) \end{aligned}$$

27



Problem 4.3

試求下列週期訊號的DTFT = ?

(a) $x[n] = \cos(7\pi n/16)$

(b) $x[n] = 2\cos(3\pi n/8 + \pi/3) + 4\sin(\pi n/2)$

(c) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 10k]$

使用 DTFS 求取 $X[k] = ?$ 試一試

使用 DTFT 甚麼性質？可轉變 DTFS \rightarrow DTFT

28



Convolution & Multiplication with Mixtures of Periodic and Non-periodic Signals

週期與非週期性訊號的褶積與乘積性質

在時域，週期的輸入訊號與非週期脈衝響應做褶積運算，
在頻域，週期的輸入訊號與非週期頻率響應做乘積運算，
因此，即牽涉週期與非週期混合訊號的分析。

在連續時間，牽涉週期與非週期混合訊號分析時用FT，
在離散時間，牽涉週期與非週期混合訊號分析時用DTFT。

29



週期與非週期性訊號的褶積與乘積性質

週期與非週期性訊號的褶積

時域中的褶積運算相當於頻域中的乘積運算：

$$y(t) = x(t) * h(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

週期訊號若使用 FT 時可由頻率位移觀念：

$$x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

其中 $X[k]$ 為 FS 係數。(仍以 FS 進而以頻率平移求 FT)

30



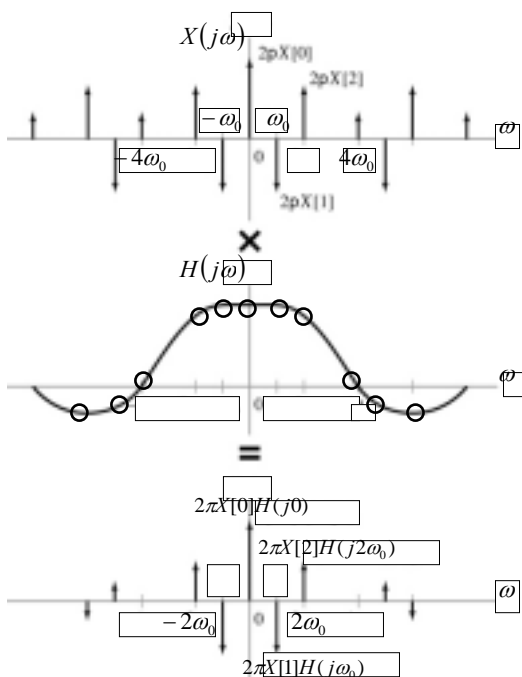
週期與非週期性訊號的褶積 (cont.)

應用脈衝的篩選性質與頻域乘積性質： $Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0) H(j\omega)$$

$$\therefore H(j\omega) \cdot \delta(\omega - k\omega_0) = H(jk\omega_0) \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

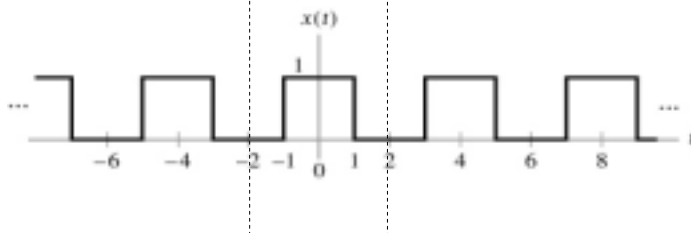
$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0) H(jk\omega_0)$$



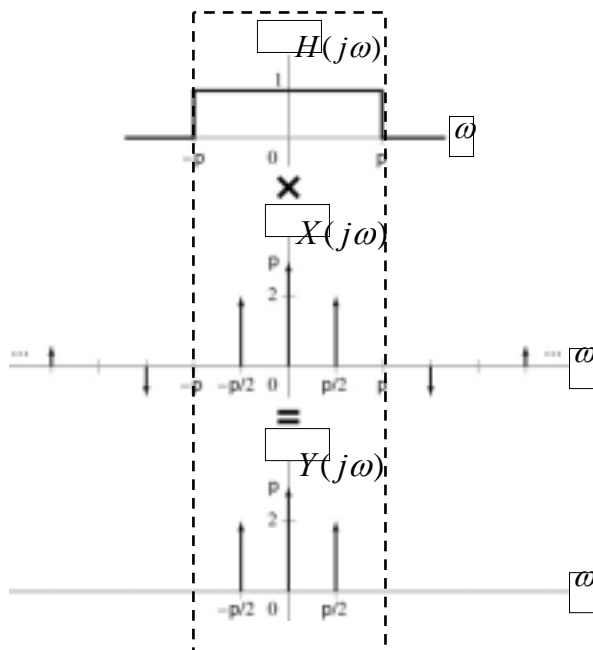


Example 4.4

LTI系統脈衝響應 $h(t) = (1/\pi t) \sin(\pi t)$ ，試以褶積性質求該系統的輸出=? 輸入方波如下圖



基本頻率：
$$\omega_0 = 2\pi / 4 = \frac{\pi}{2}$$





Ex. 4.4 Solution

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-j\frac{k\pi}{2}t} dt = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{-jk\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \Big|_{-1}^1 \right) \\
 &= \frac{1}{-jk2\pi} \left[e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{jk2\pi} \left[e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}} \right] \\
 &= \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

35



Solution: (cont.)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{j\frac{k\pi}{2}t} \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) \\
 X(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \left(2\pi \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right) \right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \cdot \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right) \\
 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \cdot \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k} \cdot \delta\left(\omega - \frac{k\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

36



Solution: (cont.)

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = 2\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta(\omega) + 2\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

↕ FT {以頻率平移方式 快速轉換}

$$y(t) = \frac{1}{\pi} e^{j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t} \right)$$

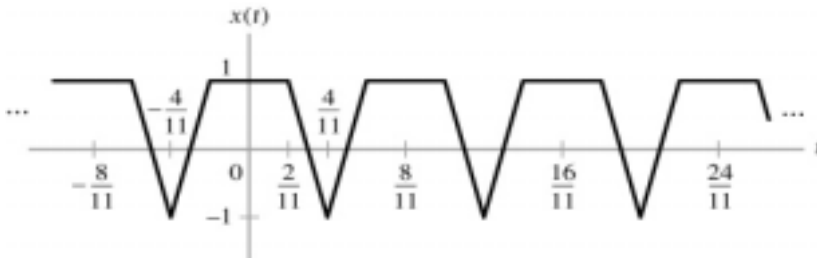
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left((e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t}) / 2 \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

37



Problem 4.4

LTI系統脈衝響應 $h(t) = 2\cos(4\pi t) \sin(\pi t)/(\pi t)$ ，試以FT 求該系統的輸出=? 輸入如下圖：




週期 $T = 8/11$; $\omega_0 = 2\pi/T = 11\pi/4$

38



P 4.4 Solution

Hint: $h(t) = 2\cos(4\pi t) \sin(\pi t)/(\pi t)$,

$\sin(\pi t)/(\pi t) \leftrightarrow$  有效寬度 $W = \pm\pi$

$2\cos(4\pi t)$: 頻率左、右平移至 $\pm 4\pi$ 位置 ?

$\therefore H(j\omega) =$ 理想的band pass filter

學生試以 FT 求該系統的輸出= ? Solution: $y(t) = 0$

39



Multiplication of Periodic and Non-periodic Signal

週期與非週期性訊號的乘積

時域中的乘積運算相當於頻域中的褶積運算 :

$$y(t) = g(t) \cdot x(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * X(j\omega)$$

週期訊號若使用 FT 時可由頻率位移觀念 :

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

其中 $X[k]$ 為 FS 係數。

40



週期與非週期性訊號的乘積(cont.)

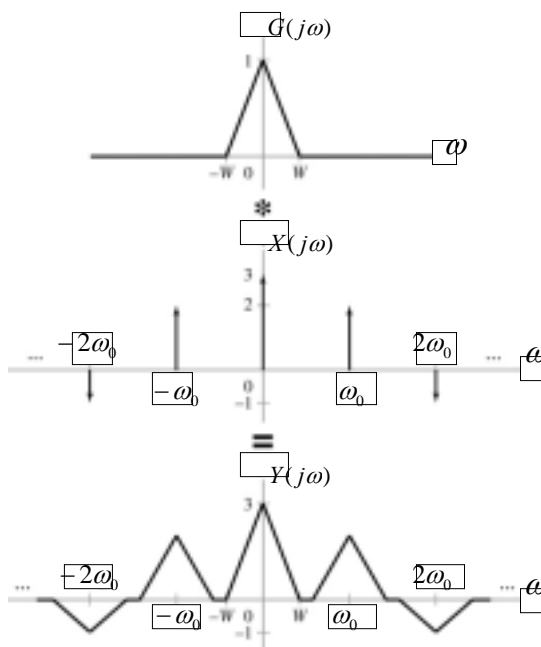
應用脈衝的篩選性質：

$$g(t) \cdot x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} G(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\therefore G(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_0) = G(j(\omega - k\omega_0)),$$

$$y(t) = g(t) \cdot x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] G(j(\omega - k\omega_0))$$

41



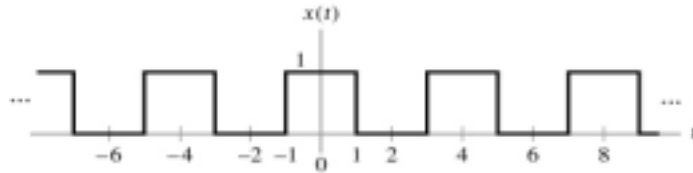
42



Example 4.5

考慮 $y(t) = g(t) x(t)$ 系統，

- (a) 試求 $Y(j\omega)$ ，以 $G(j\omega)$ 表示
 (b) 若 $g(t) = \cos(t/2)$ ，試繪 $Y(j\omega)$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

43



Solution : The FS representation of $x(t)$:

$$x(t) \stackrel{FS; \Omega_0 = \frac{\pi}{2}}{\leftrightarrow} X[k] = \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k}$$

(a)
 代入乘法性質：

$$\begin{aligned}
 y(t) = g(t) \cdot x(t) &\stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = G(j\omega) * X(j\omega) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] G(j(\omega - k\omega_0)) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k} G(j(\omega - k\pi/2))
 \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

44



Solution (cont.)

$$(b) \quad g(t) = \cos(t/2), \quad \omega_c = \frac{1}{2}$$

$$g(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \pi\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} y(t) = g(t) \cdot x(t) &\stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = G(j\omega) * X(j\omega) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] G(j(\omega - k\omega_0)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k} G(j(\omega - k\pi/2)) \end{aligned}$$

45



Solution (cont.)

$$y(t) = g(t) \cdot x(t) \stackrel{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = G(j\omega) * X(j\omega)$$

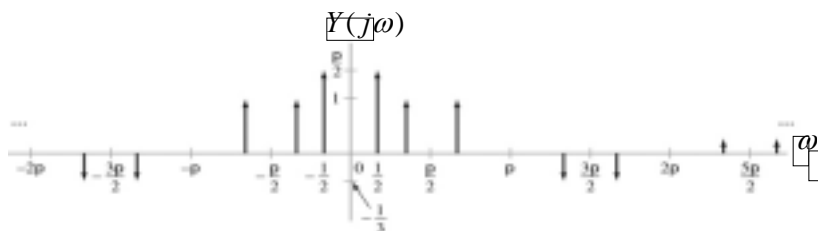
$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] G(j(\omega - k\omega_0)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k} \underline{G(j(\omega - k\pi/2))} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k} \left(\underline{\pi\delta\left(\omega - \frac{1}{2} - k\pi/2\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{1}{2} - k\pi/2\right)} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} \left(\delta\left(\omega - \frac{1}{2} - k\pi/2\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2} - k\pi/2\right) \right) \end{aligned}$$

46



Solution for Example 4.5 (b)

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} \left(\delta\left(\omega - \frac{1}{2} - k\pi/2\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2} - k\pi/2\right) \right)$$



47



Example 4.6

在頻域中，試分析乘法性質調幅(AM)原理

發射訊號： $r(t) = m(t) \cdot \cos(\omega_c t)$

$m(t)$: 調變訊號

$\cos(\omega_c t)$: 載波訊號 $\cos(\omega_c t) \xrightarrow{FT} \pi \delta(\omega - \omega_c) + \pi \delta(\omega + \omega_c)$

$$\begin{aligned} r(t) \xrightarrow{FT} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} M(j\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_c) + \pi \delta(\omega + \omega_c)] \\ &= \frac{1}{2} M(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2} M(j(\omega + \omega_c)) \end{aligned}$$

48



接收訊號：

$$g(t) = r(t) \cdot \cos(\omega_c t) \quad \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}R(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2}R(j(\omega + \omega_c))$$

$$\cos(\omega_c t): \text{本地振盪訊號} \quad \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \quad \pi \delta(\omega - \omega_c) + \pi \delta(\omega + \omega_c)$$

$$\begin{aligned} g(t) \quad \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \quad G(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * [\pi \delta(\omega - \omega_c) + \pi \delta(\omega + \omega_c)] \\ &= \frac{1}{2} R(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2} R(j(\omega + \omega_c)) \end{aligned}$$



代入 $m(t)$: 調變訊號的 spectrum $M(j\omega)$:

$$R(j\omega) = \frac{1}{2} M(j(\omega - \omega_c)) + \frac{1}{2} M(j(\omega + \omega_c))$$

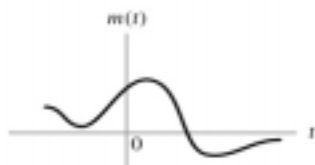
接收訊號經本地振盪級訊號的 spectrum $G(j\omega)$:

$$g(t) \quad \stackrel{FT}{\leftrightarrow} \quad G(j\omega)$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} M(j(\omega - \omega_c - \omega_c)) + \frac{1}{2} M(j(\omega - \omega_c + \omega_c)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} M(j(\omega + \omega_c - \omega_c)) + \frac{1}{2} M(j(\omega + \omega_c + \omega_c)) \right] \\ &= \frac{1}{4} M(j(\omega - 2\omega_c)) + \frac{1}{2} M(j(\omega)) + \frac{1}{4} M(j(\omega + 2\omega_c)) \end{aligned}$$

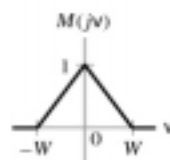


(a)



$$\omega = \nu$$

\longleftrightarrow FT



(b)

(a) Simplified AM radio transmitter and receiver.

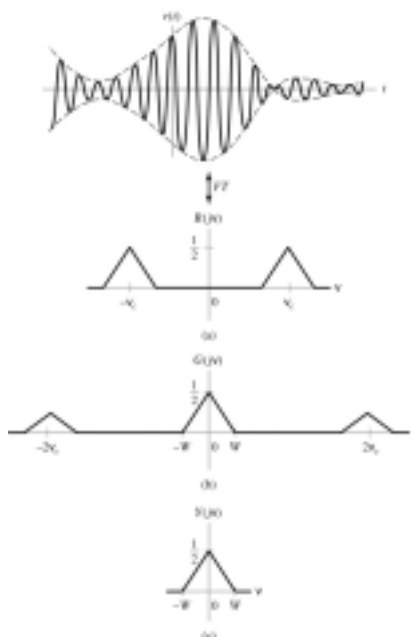
(b) Spectrum of message signal.



Signals in the AM Transmitter and Receiver

Signals in the AM transmitter and receiver.

- (a) Transmitted signal $r(t)$ and spectrum $R(j\omega)$.
- (b) Spectrum of $q(t)$ in the receiver.
- (c) Spectrum of receiver output $y(t)$.





Example 4.7

利用乘法性質來分析訊號截斷對DTFT 的影響
(僅使用 $2M+1$ 個 $x[n]$ 訊號值)

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos\left(\frac{7\pi}{16}n\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{16}n\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{j\frac{7\pi}{16}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{7\pi}{16}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{9\pi}{16}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{9\pi}{16}n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{2}2\pi\delta\left(\Omega - \frac{7\pi}{16}\right) + \frac{1}{2}2\pi\delta\left(\Omega + \frac{7\pi}{16}\right) + \frac{1}{2}2\pi\delta\left(\Omega - \frac{9\pi}{16}\right) + \frac{1}{2}2\pi\delta\left(\Omega + \frac{9\pi}{16}\right) \\ &= \pi\delta\left(\Omega - \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{9\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{9\pi}{16}\right) \end{aligned}$$

53



Ex 4.7 Solution

$$y[n] = x[n] \cdot w[n]$$

$y[n]$ 是被截斷的 $x[n]$ 信號

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$

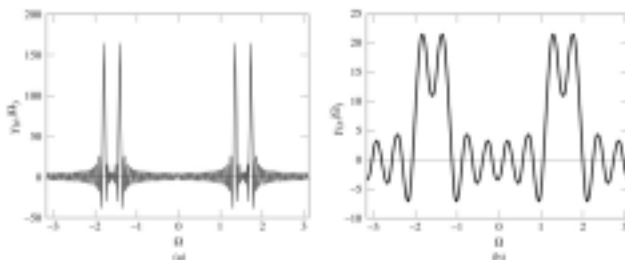
$$W(e^{j\Omega}) = \frac{\sin(\Omega(2M+1)/2)}{\sin(\Omega/2)},$$

$$X(e^{j\Omega}) = \pi\delta\left(\Omega - \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{9\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{9\pi}{16}\right),$$

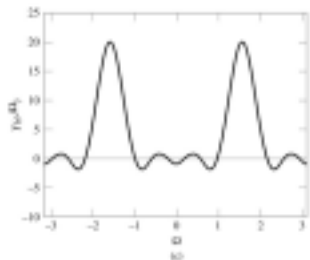
$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) * W(e^{j\Omega})$$

$$= \frac{1}{2} \left(W\left(e^{j(\Omega - \frac{7\pi}{16})}\right) + W\left(e^{j(\Omega + \frac{7\pi}{16})}\right) + W\left(e^{j(\Omega - \frac{9\pi}{16})}\right) + W\left(e^{j(\Omega + \frac{9\pi}{16})}\right) \right)$$

54



若Window寬度M足夠大
 Ω_1 和 Ω_2 可被分離



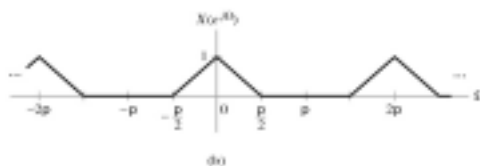
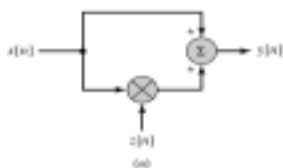
思考：
 Window 寬度如何影響
 原始信號？

Effect of windowing a data record. $Y(e^{j\Omega})$ for different values of M , assuming that $\Omega_1 = 7\pi/16$ and $\Omega_2 = 9\pi/16$.
 (a) $M = 80$, (b) $M = 12$, (c) $M = 8$.



Problem 4.7

參考下圖系統與輸入，試求輸出的DTFT



系統功能： $y[n] = x[n] + x[n] \cdot z[n]$

系統控制：
 (a) $z[n] = (-1)^n$
 (b) $z[n] = 2 \cos(\pi n / 2)$



Solution:

$$(a) \quad z[n] = (-1)^n = e^{-jn\pi} \quad \xleftrightarrow{DTFT} \quad Z(e^{j\Omega}) = 2\pi \delta(\Omega - \pi)$$

$$y[n] = x[n] + x[n] \cdot z[n] \quad \xleftrightarrow{DTFT} \quad Y(e^{j\Omega})$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= X(e^{j\Omega}) + \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) * 2\pi \delta(\Omega - \pi) \\ &= X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega - \pi)}) \end{aligned}$$



Solution:

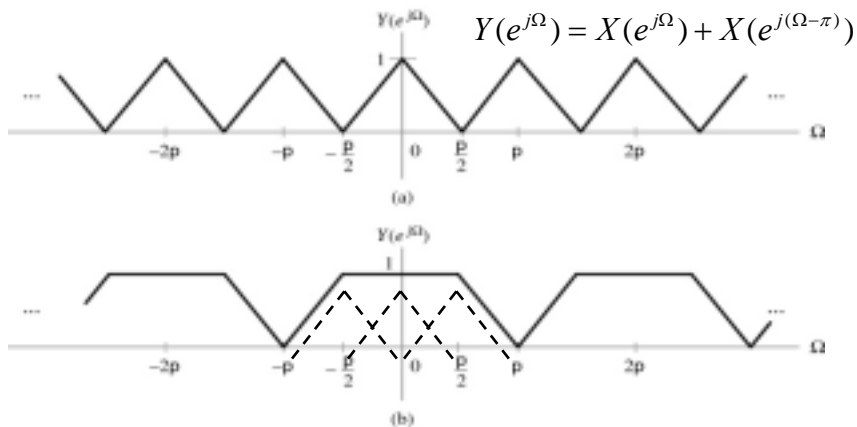
$$(b) \quad z[n] = 2 \cos(n\pi / 2) \quad \xleftrightarrow{DTFT} \quad Z(e^{j\Omega}) = 2\pi \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y[n] = x[n] + x[n] \cdot z[n] \quad \xleftrightarrow{DTFT} \quad Y(e^{j\Omega})$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\Omega}) &= X(e^{j\Omega}) + \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) * \left(2\pi \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega - \frac{\pi}{2})}) + X(e^{j(\Omega + \frac{\pi}{2})}) \end{aligned}$$



Solutions to Problem 4.7 :



$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega-\frac{\pi}{2})}) + X(e^{j(\Omega+\frac{\pi}{2})})$$

59



討論 FT 如何用於離散時間性訊號

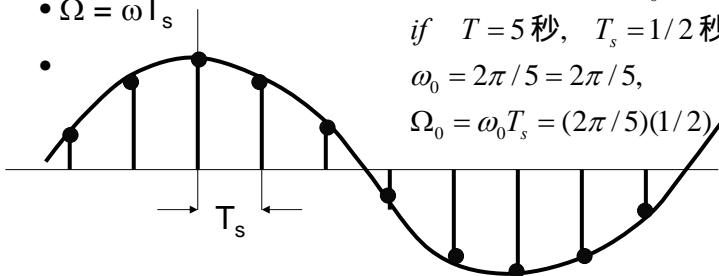
- 建立連續時間頻率 ω 與離散時間頻率 Ω 之對應關係

- $x(t) = e^{j\omega t}$ 對應關係 $g[n] = x(nT_s) = e^{j\Omega n}$

- $g[n] = x(nT_s)$

- $\Omega = \omega T_s$

-



Ex: $N = 10, \therefore \Omega_0 = 2\pi / N = \pi / 5$

if $T = 5$ 秒, $T_s = 1/2$ 秒

$\omega_0 = 2\pi / 5 = 2\pi / 5,$

$\Omega_0 = \omega_0 T_s = (2\pi / 5)(1/2) \neq \pi / 5$

60



建立 FT 與 DTFT 的關係

離散非週期時間訊號 $x[n]$ 的DTFT: $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$

DTFT \leftrightarrow FT: ($\Omega = \omega T_s$)

$$X(j\omega) = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \omega T_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega T_s n}$$

自變數 Ω 改成 ω 即可

61



$$X(j\omega) = X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega = \omega T_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega T_s n}$$

\therefore

$$\delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega T_s n} \quad \text{Time-shifting property}$$

\therefore

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{FT} X_\delta(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega T_s n}$$

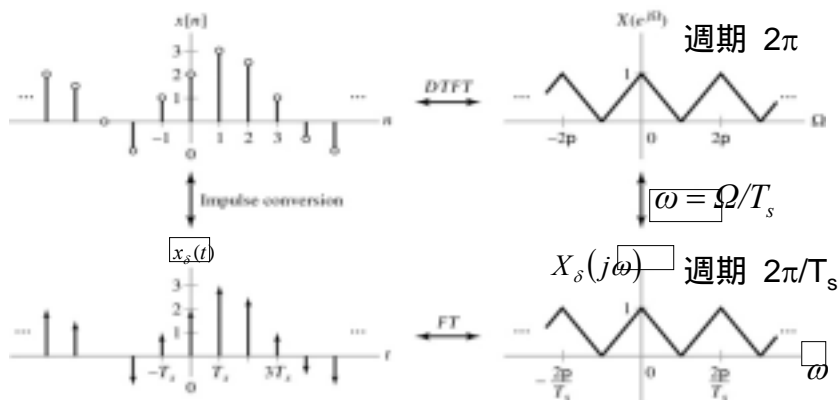
$x[n]$ 的連續時間表示法

{Hint: 這頁總結DTNS 也可用 FT 表示法}

62



Relationship between FT and DTFT Representations of a Discrete-Time Signal



$x[n]$ 的連續時間表示法

63



Example 4.8

試求下述的DTFT pair 相關的FT pair = ?

$$x[n] = a^n u[n] \quad \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \quad X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

Solution:

回憶：上述對應式如何獲得

let $\Omega = \omega T_s$

$$x(t) \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad X(j\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T_s}}$$

64



Problem 4.8

描繪下述離散訊號的FT 表示法

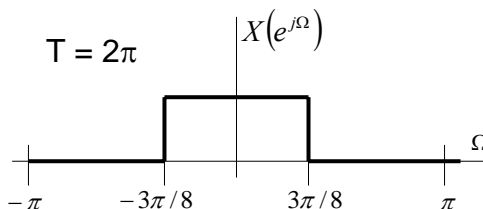
(a) $T_s = 1/2$

(b) $T_s = 3/2$

$$x[n] = \frac{\sin(3\pi n/8)}{\pi n}$$

Solution:

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega})$$



Periodic Spectrum :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq 3\pi/8 \\ 0, & 3\pi/8 < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

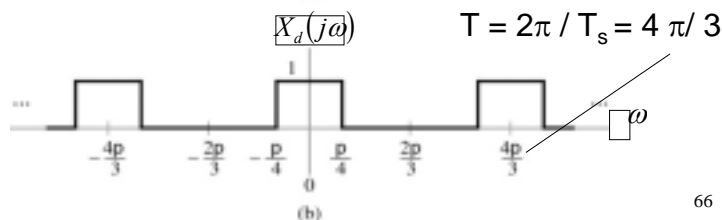
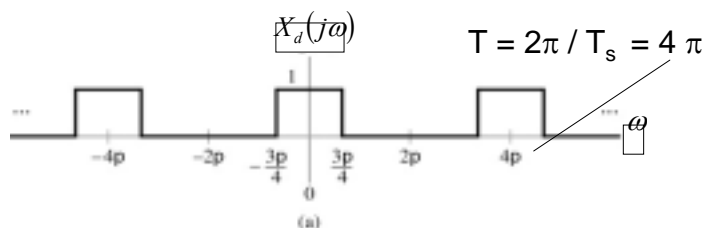
65



Solution: 雖以 FT 表示法，仍然是 Periodic Spectrum

(a) $T_s = 1/2 \rightarrow \omega = \Omega/T_s = 2\Omega$

(b) $T_s = 3/2 \rightarrow \omega = \Omega/T_s = 2\Omega/3$



66



建立 FT 與 DTFS 的關係

N 週期訊號 $x[n]$ 的 DTFT 表示法：

$$x[n] \stackrel{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

其中 $X[k]$ 是 DTFS 係數，另代入 $\Omega = \omega T_s$ 可得 FT 表示法：

$$x[n] \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) = X(e^{j\omega T_s}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta(\omega T_s - k\Omega_0)$$

{Hint: 這頁總結 DTFS 也可用 FT 表示法}

67



代入 $\Omega = \omega T_s$ 可得 FT 表示法：

$$\begin{aligned} x[n] \stackrel{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) &= X(e^{j\omega T_s}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta(\omega T_s - k\Omega_0) \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta(T_s(\omega - k\Omega_0 / T_s)) \end{aligned}$$

另代入 脈衝比例變換性質： $\delta(a\omega) = \frac{1}{a} \delta(\omega)$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega T_s}) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta(T_s(\omega - k\Omega_0 / T_s)) \\ &= \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \delta((\omega - k\Omega_0 / T_s)) \end{aligned}$$

68



Problem 4.9 試求下述的離散時間訊號(DTFS)相關的FT pair = ?

$$x[n] = \cos(2\pi n / N)$$

Solution: 請學生繼續完成

$$x[n] = \cos(2\pi n / N) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n};$$

$$\text{period} = N, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

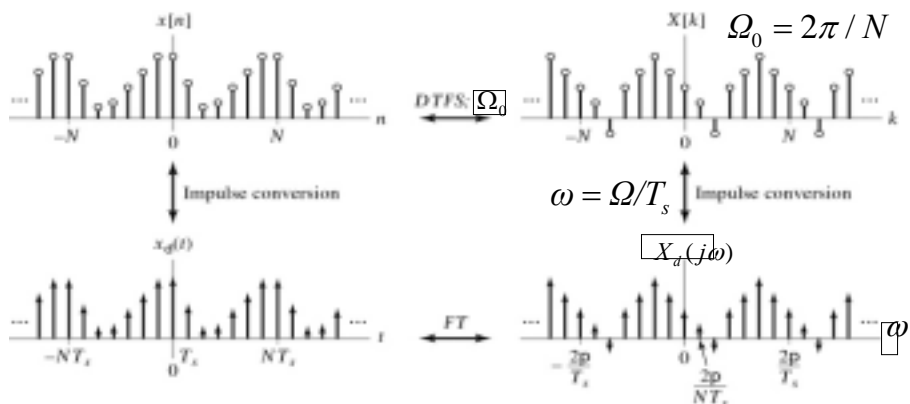
Hint: DTFS \rightarrow DTFT 應用頻率位移性質

DTFT \rightarrow FT 代入 $\Omega = \omega T_s$

69



Relationship between FT and DTFS representations of a discrete-time periodic signal



$x[n]$ 的連續時間表示法

$x[n]$ 的連續頻譜表示法 70