Fourier Applications

傅立葉表示法對混合訊號的應用

Lecture 4-1

Fourier Representations

DTFS: $x[n]$: discrete-time and periodic signal

$X[k]$: discrete and periodic spectrum

FS: $x(t)$: continuous-time and periodic signal

$X[k]$: discrete-time and non-periodic spectrum

DTFT: $x[n]$: discrete-time and non-periodic signal

$X(e^{j\Omega})$: continuous and periodic spectrum

FT: $x(t)$: continuous-time and non-periodic signal

$X(j\omega)$: continuous-time and non-periodic spectrum

Introduction

- 週期與非週期性訊號混合
  - 週期性時間訊號輸入與 非週期性時間系統脈衝響應
  - 週期性時間訊號直接應用 FT 公式時無法收斂
  - 如何用 FT 表示週期性時間訊號?
- 連續時間訊號與離散時間訊號混合
  - 連續時間取樣系統
  - 如何用 FT 表示離散時間訊號? 以 FT 代替 DTFT
  - 如何取樣連續時間訊號? 取樣間距 ?
  - 如何取樣離散時間訊號? 次取樣?

Objectives

- 討論 FT 如何用於週期性訊號
  - 建立 FT 與 FS 的關係
  - 建立 DTFT 與 DTFS 的關係
- 週期與非週期性訊號的褶積與乘積性質
  - 週期與非週期性訊號的 褶積
  - 週期與非週期性訊號的 乘積

(cont.)

- 討論 FT 如何用於離散時間性訊號
  - 建立 FT 與 DTFT 的關係
  - 建立 FT 與 DTFS 的關係
- 取樣 (Sampling)
  - 連續時間訊號的取樣
  - 離散時間訊號的取樣

(cont.)

- 從離散樣本重建連續時間性訊號
  - 取樣定理 (Sampling Theorem)
  - 理想的訊號重建 (Ideal Reconstruction)
  - 重建基本方法-零階保持器 (Zero-Order Hold)

(cont.)

- 連續時間性訊號的離散時間性處理
  - 基本離散時間性處理系統
  - 超取樣 (Over Sampling)
  - 十分法 (Decimation)
  - 內插法 (Interpolation)

(cont.)

- 有限時間非週期性訊號 FS 表示法
  - 建立 DTFS 與 DTFT 的關係
  - 建立 FS 與 FT 的關係
- FT 近似 DTFS
- 高效率 DTFS 演算法
  - 快速傅立葉轉換 (Fast Fourier Transform, FFT)

FT for Periodic Signals

討論 FT 如何用於週期性訊號- 建立 FT 與 FS 的關係

應用 *常數* FT 結果為 *脈衝*： $1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$

應用*頻率平移性質*： $e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$

週期性訊號 x(t) 的 FS → FT 表示法：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t} \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\, \delta(\omega - k\omega_0)$$

FS representation FT representation

FT Review

$$if \;\; X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega),$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = 1$$

$$if \;\; x(t) = \delta(t),$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{j\omega t}\, d\omega = 1$$

FT Frequency-Shifting Review

$$if\ \ X(j\omega) = 2\pi\delta\left(\omega - k\omega_0\right),$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)\, e^{j\omega t}\, d\omega = e^{jk\omega_0 t}$$

FT Time-Shifting Review

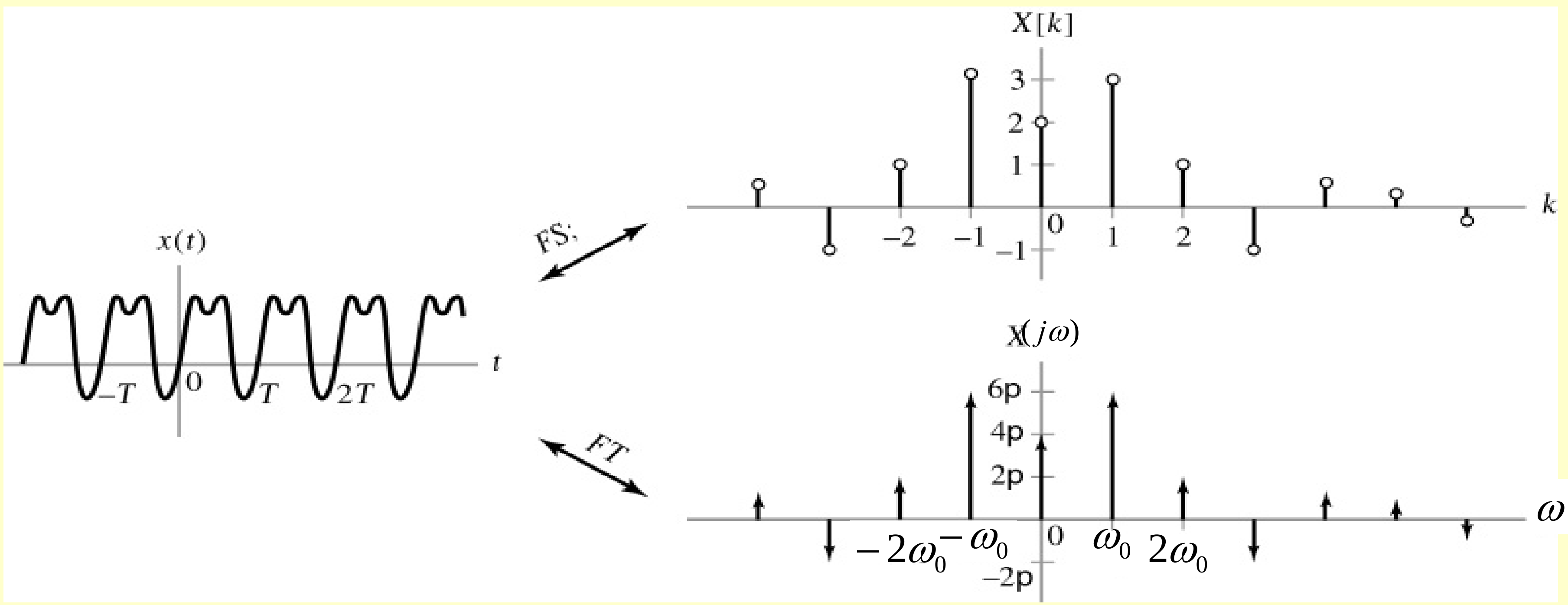
$$if\ \ x(t) = \delta(t - t_0),$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, e^{j\omega t}\, dt = e^{j\omega t_0}$$

FS & FT Representation of Periodic Continuous-Time Signal

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t} \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad X(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\;\delta(\omega-k\omega_0)}$$



不可直接用**FT**公式轉換；採用頻率位移性質

Example 4.1:

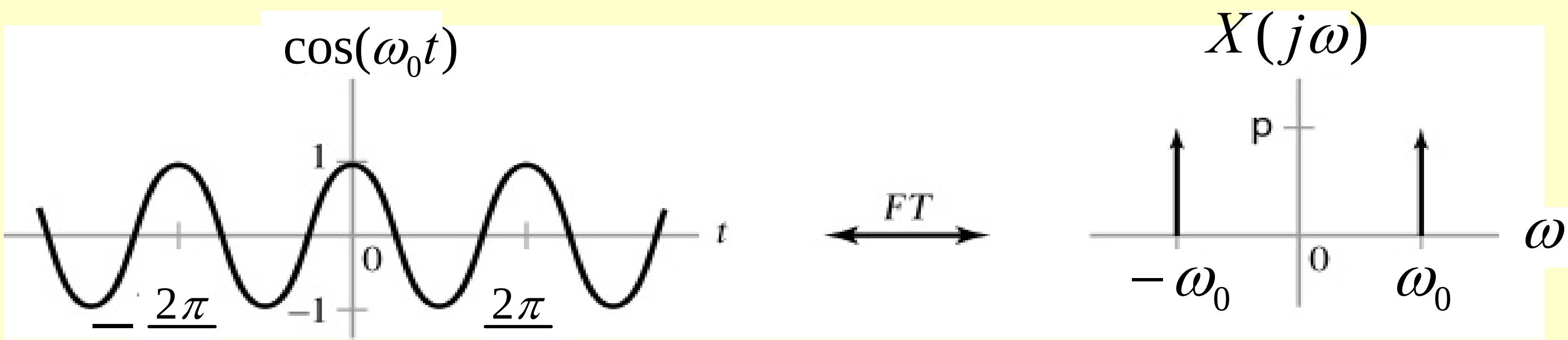
試求 x(t)=cos(ω_0t) 的 FT 表示法

Solution:

$$\because e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

$$= \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$



Example 4.2: 試求 $p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$ 的 FT 表示法

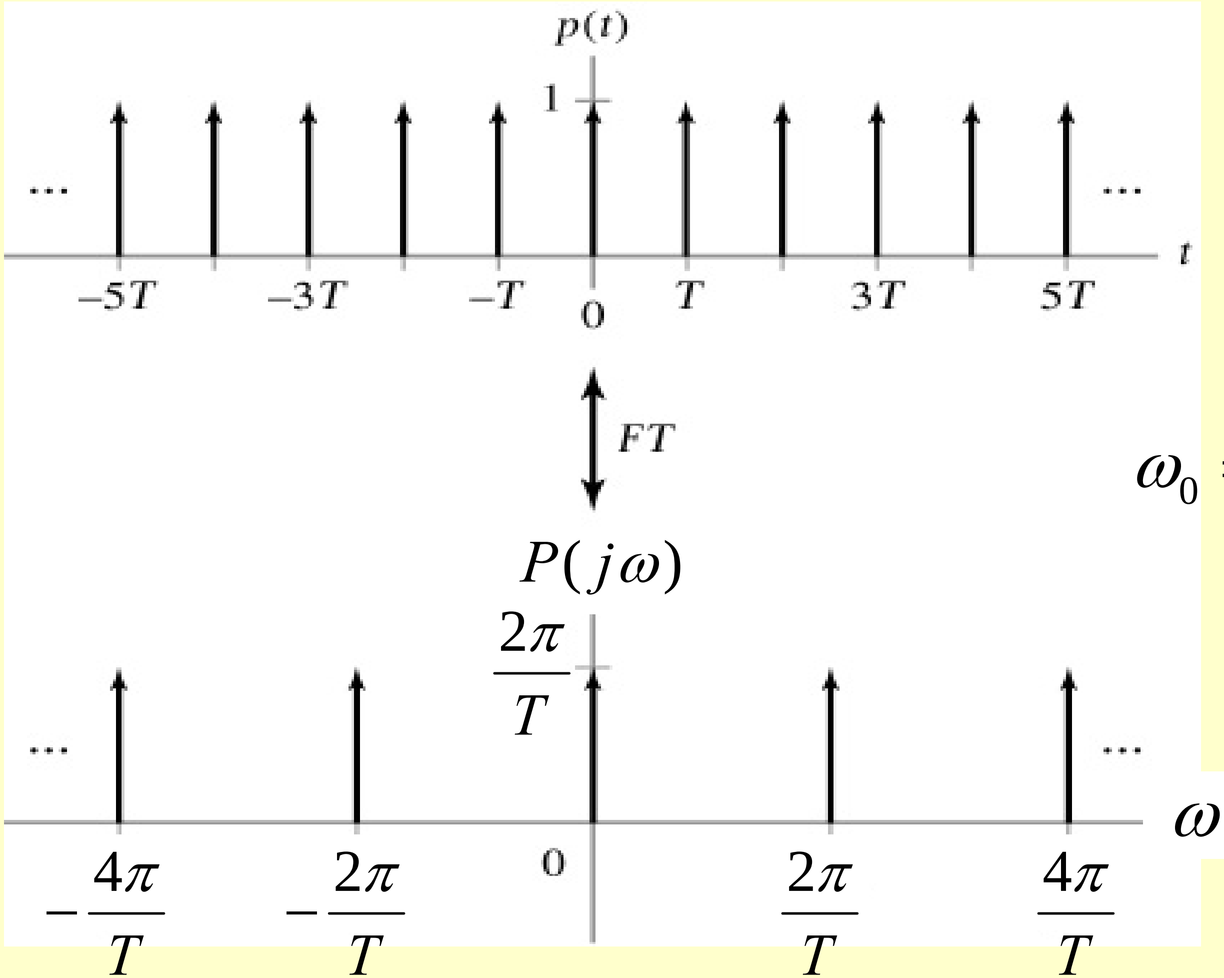
Solution:

p(t) 的 FS 係數： $$P[k]=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{T}$$

p(t) 可表示成為： $$p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}P[k]\,e^{jk\omega_0 t}=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_0 t}$$

FT 頻率平移性質： $$e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

p(t) 的 FT： $$p(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$$



$\omega_0 = 2\pi/\mathrm{T}$

頻域中脈衝間距 與 時域中脈衝間距 成反比

Problem 4.1: 試求 $x(t)=\sin(\omega_0 t)$ 的 FT 表示法

Solution:

尤拉公式表示： $x(t)=\sin(\omega_0 t)=\dfrac{1}{j2}e^{j\omega_0 t}-\dfrac{1}{j2}e^{-j\omega_0 t}$

x(t) 的 FS 係數：

(由審視法 求出)

$$X[k]=\begin{cases}\dfrac{1}{j2}, & k=+1\\ -\dfrac{1}{j2}, & k=-1\end{cases}$$

x(t) 可表示成為： $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X[k]\,e^{jk\omega_0 t}=\dfrac{1}{j2}e^{j\omega_0 t}-\dfrac{1}{j2}e^{-j\omega_0 t}$

P 4.1 (cont.)

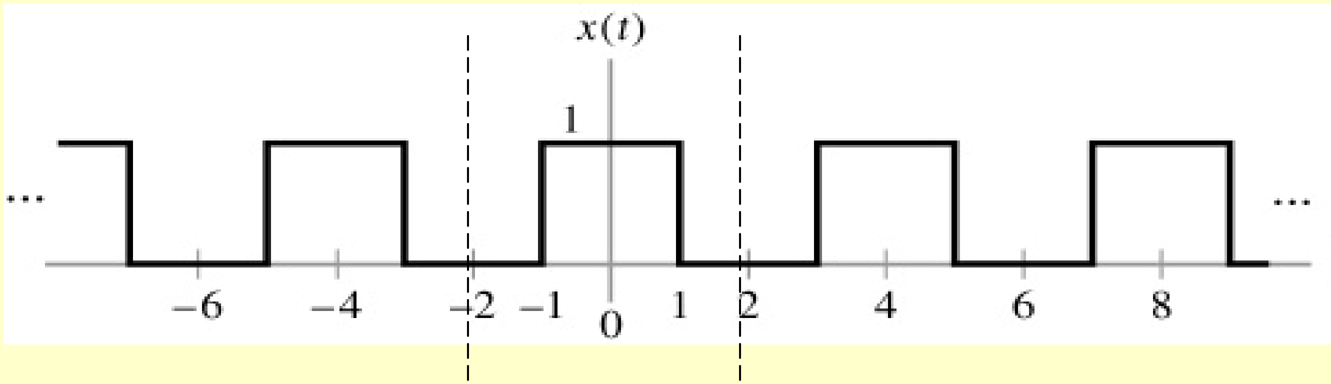
x(t) 可表示成為：
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X[k]\,e^{jk\omega_0 t}=\frac{1}{j2}e^{j\omega_0 t}-\frac{1}{j2}e^{-j\omega_0 t}$$

FT 頻率平移性質：
$$e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

x(t) 的 FT：
$$\sin(\omega_0 t)\xleftrightarrow{FT}\frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0)$$

學生請試將頻譜圖繪出？

Problem 4.1(b) 試求 下圖中方波的 FT 表示法



Solution: (請學生試做一做)

建議步驟：

(a) 求出 FS 表示法

(b) 應用FT 平移法性質

DTFT for the Periodic Signals

討論 DTFT 如何用於週期性訊號-建立 DTFT與 DTFS 的關係

N 週期訊號 x[n] 的 DTFS 公式： $x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{jk\Omega_0 n}$

DTFT 頻率平移性質： $\dfrac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} \delta\left(\Omega - k\Omega_0\right)$

DTFT 頻率分佈是<u>週期 2π 的函數</u>： (結合頻率平移性質)

$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - k\Omega_0 - m2\pi\right)$$

DTFT Review

$$if \quad x[n] = \delta[n],$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]\, e^{-j\Omega n} = 1$$

DTFT 頻率平移性質：

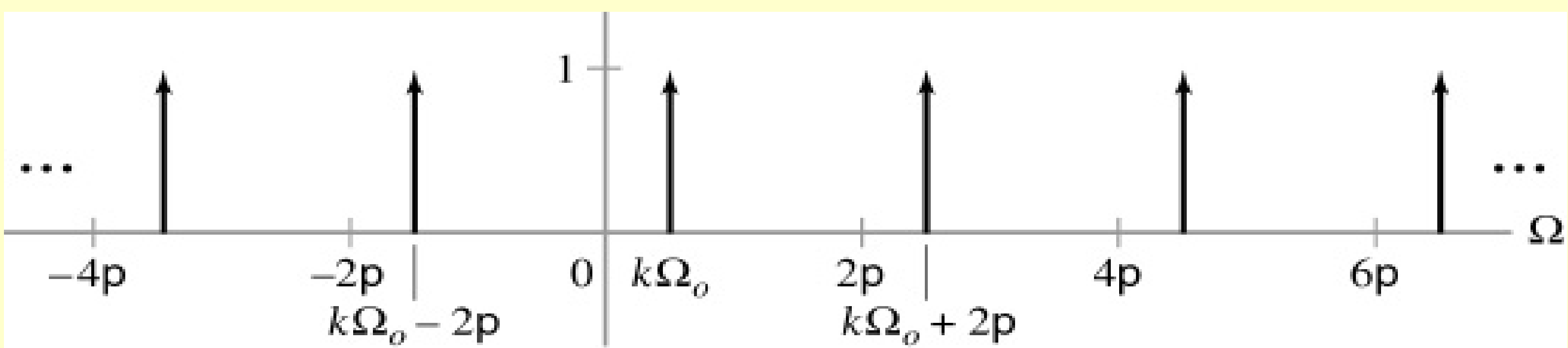
$$\text{if} \quad X\left(e^{j\Omega}\right) = \delta\left(\Omega - k\Omega_0\right),$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta\left(\Omega - k\Omega_0\right) e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\frac{1}{2\pi} e^{jk\Omega_0 n} \quad \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \quad \delta\left(\Omega - k\Omega_0\right)$$

DTFT 頻率分佈是週期2π的函數：(結合頻率平移性質)

$$\frac{1}{2\pi}e^{jk\Omega_0 n} \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-k\Omega_0-m2\pi\right)$$



N 週期訊號 x[n] 的 DTFS 公式：$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, \underline{e^{jk\Omega_0 n}}$

x[n] 的DTFT： $X(e^{j\Omega})=\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\cdot \underline{2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-k\Omega_0-m2\pi\right)}$

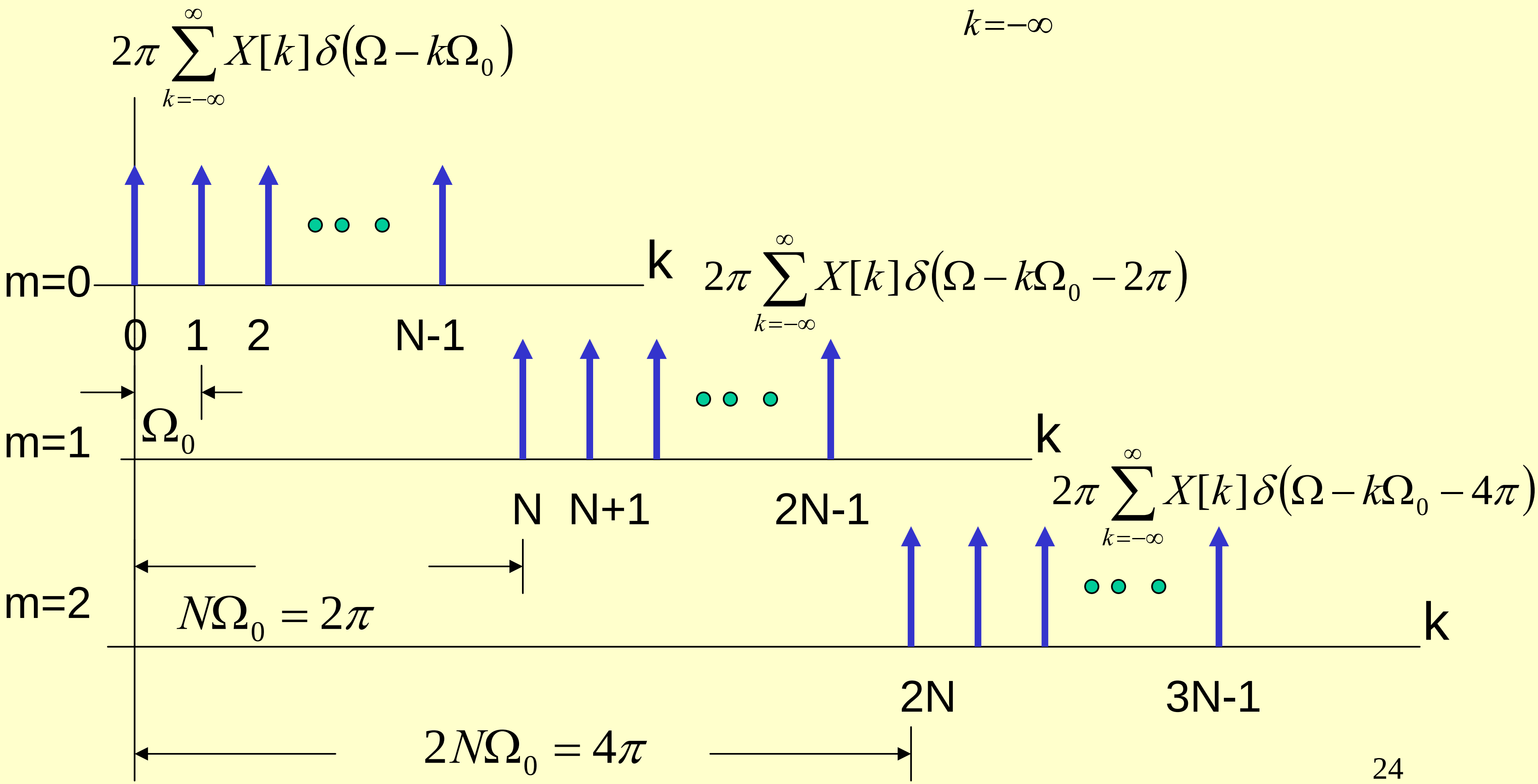
X[k]的週期為N，所以N Ω_0 = N(2π/N)=2π，上式可簡化：

{ Hint: X[k]頻率位置：0 ~ (N-1)Ω_0 可以合併入}

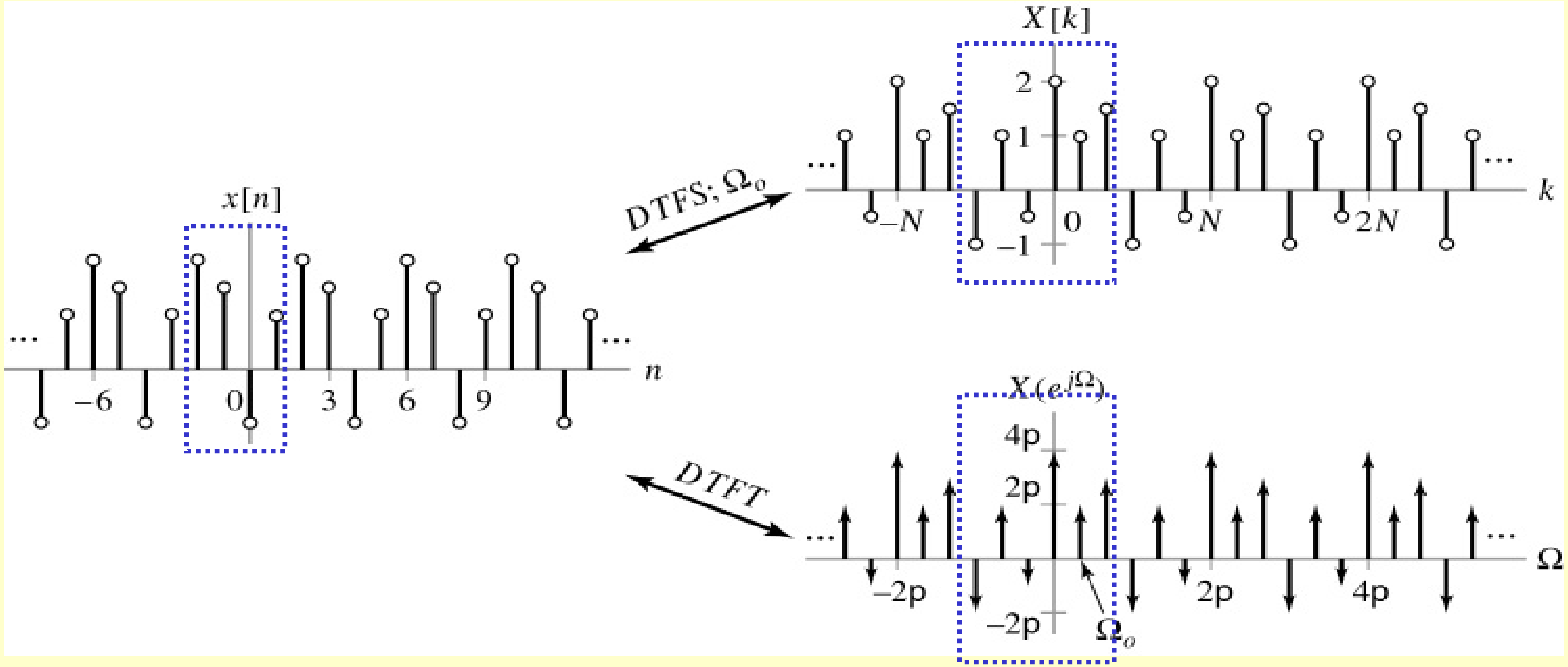
$$x[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta\left(\Omega-k\Omega_0\right)$$

討論：$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\cdot 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - k\Omega_0 - m2\pi\right)$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta\left(\Omega - k\Omega_0\right)$$



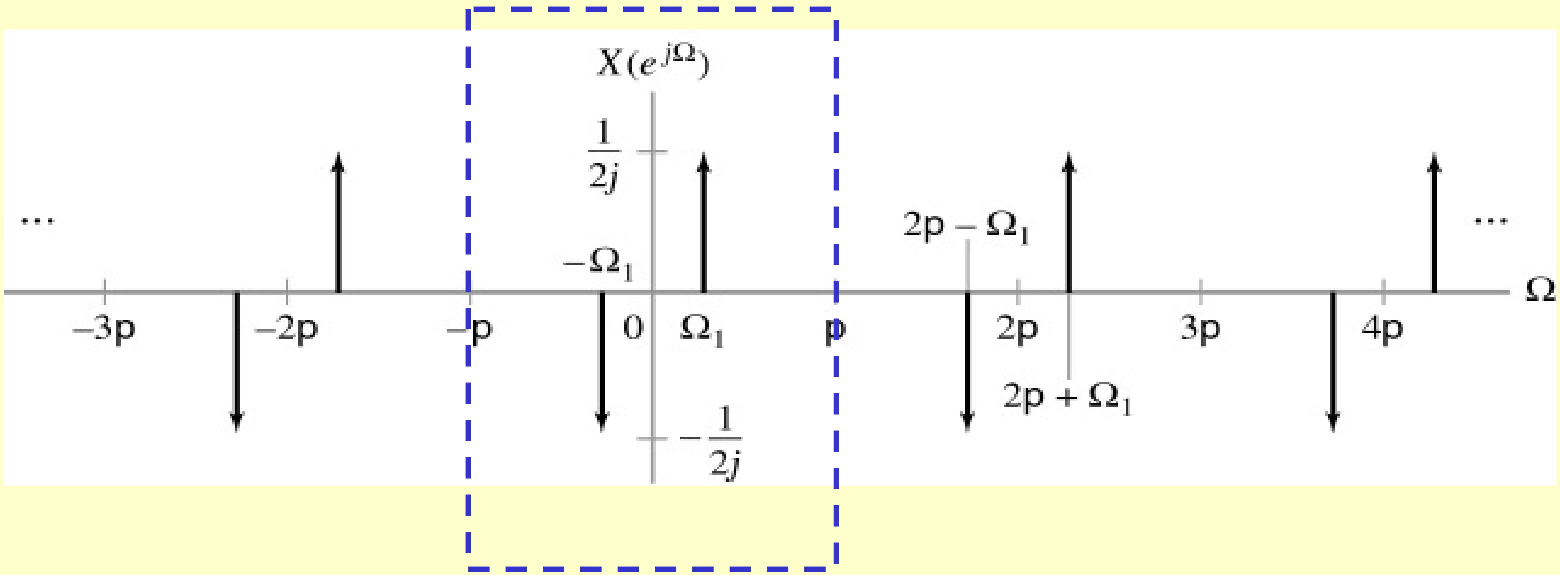
DTFS & DTFT Representations of Periodic Discrete-Time Signals



Example 4.3 試求下圖的 Inverse DTFT， x[n] = ?

(其中 $\Omega_1 = \pi/N$) ∵

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{j2}\delta\left(\Omega-\Omega_1\right)-\frac{1}{j2}\delta\left(\Omega+\Omega_1\right),\quad -\pi<\Omega<\pi$$



DTFT of periodic signal for Example 4.3.

Solution: 由前圖中，可知一個週期內 X(e^jΩ) :

$\because$

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{j2}\delta\left(\Omega-\Omega_1\right)-\frac{1}{j2}\delta\left(\Omega+\Omega_1\right),\quad -\pi<\Omega<\pi$$

$$\because\quad \frac{1}{2\pi}e^{j\Omega_1 n}\ \overset{DTFT}{\longleftrightarrow}\ \delta\left(\Omega-\Omega_1\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}e^{-j\Omega_1 n}\ \overset{DTFT}{\longleftrightarrow}\ \delta\left(\Omega+\Omega_1\right)$$

$$\therefore\quad x[n]=\frac{1}{j2}\left(\frac{1}{2\pi}e^{j\Omega_1 n}-\frac{1}{2\pi}e^{-j\Omega_1 n}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2j}e^{j\Omega_1 n}-\frac{1}{2j}e^{-j\Omega_1 n}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sin\left(\Omega_1 n\right)$$

Problem 4.3

試求下列週期訊號的DTFT =？

$$(a) \quad x[n] = \cos(7\pi n/16)$$

$$(b) \quad x[n] = 2\cos(3\pi n/8 + \pi/3) + 4\sin(\pi n/2)$$

$$(c) \quad x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-10k]$$

使用 DTFS 求取 X[k] = ？ 試一試

使用 DTFT 甚麼性質 ？ 可轉變 DTFS → DTFT

Convolution & Multiplication with Mixtures of Periodic and Non-periodic Signals

週期與非週期性訊號的摺積與乘積性質

在時域，週期的輸入訊號與非週期脈衝響應做摺積運算，

在頻域，週期的輸入訊號與非週期頻率響應做乘積運算，

因此，即牽涉週期與非週期混合訊號的分析。

在連續時間，牽涉週期與非週期混合訊號分析時用FT，

在離散時間，牽涉週期與非週期混合訊號分析時用DTFT。

週期與非週期性訊號的摺積與乘積性質

週期與非週期性訊號的摺積

時域中的摺積運算相當於頻域中的乘積運算：

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

週期訊號若使用 FT 時可由頻率位移觀念 ：

$$x(t) \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

其中 X[k] 為 FS 係數。(仍以 FS 進而以頻率平移求FT)

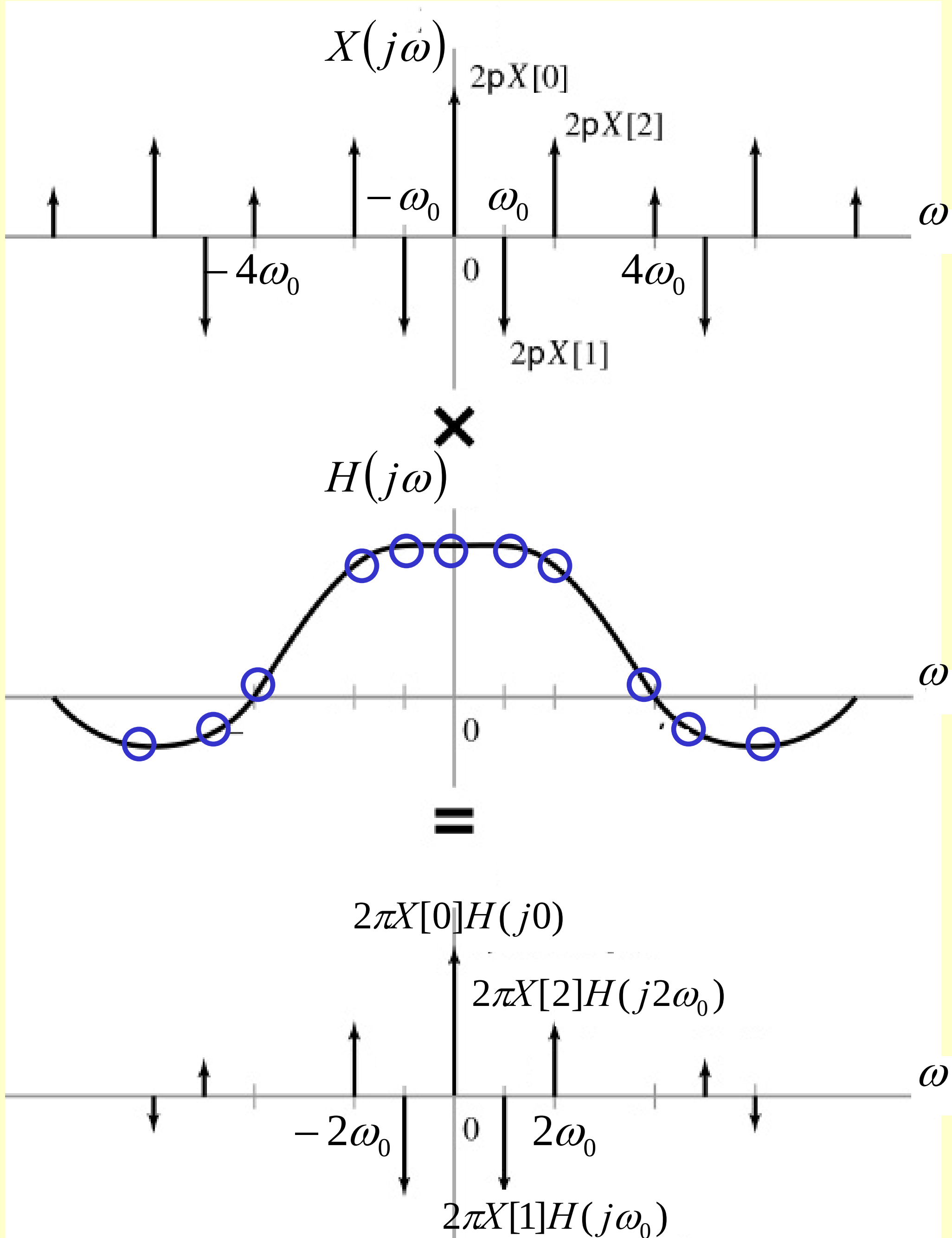
週期與非週期性訊號的摺積 (cont.)

應用脈衝的篩選性質與頻域乘積性質： $Y(j\omega)=X(j\omega)\cdot H(j\omega)$

$$y(t)=x(t)*h(t)\quad\overset{FT}{\leftrightarrow}\quad Y(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]\delta\left(\omega-k\omega_0\right)H\left(j\omega\right)$$

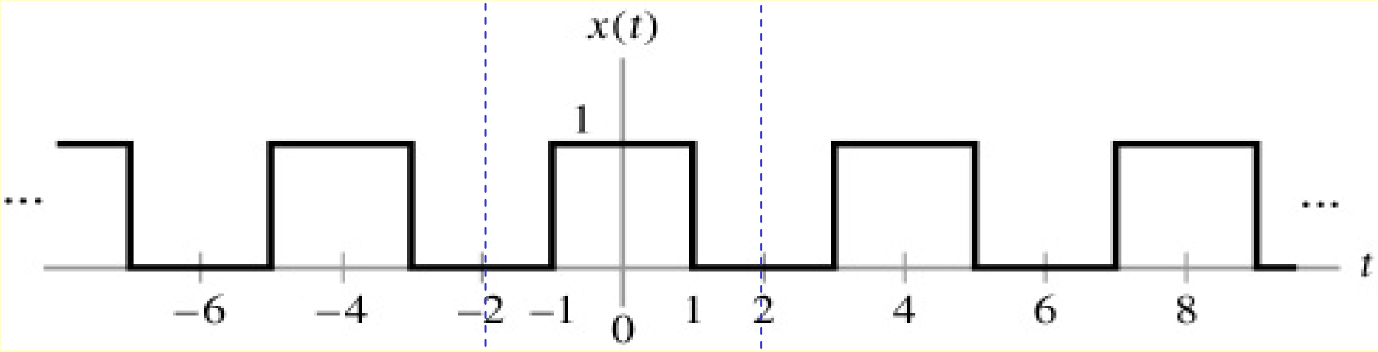
$$\because H(j\omega)\cdot\delta\left(\omega-k\omega_0\right)=H(jk\omega_0)\cdot\delta\left(\omega-k\omega_0\right)$$

$$\boxed{y(t)=x(t)*h(t)\quad\overset{FT}{\leftrightarrow}\quad Y(j\omega)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}X[k]\delta\left(\omega-k\omega_0\right)H\left(jk\omega_0\right)}$$

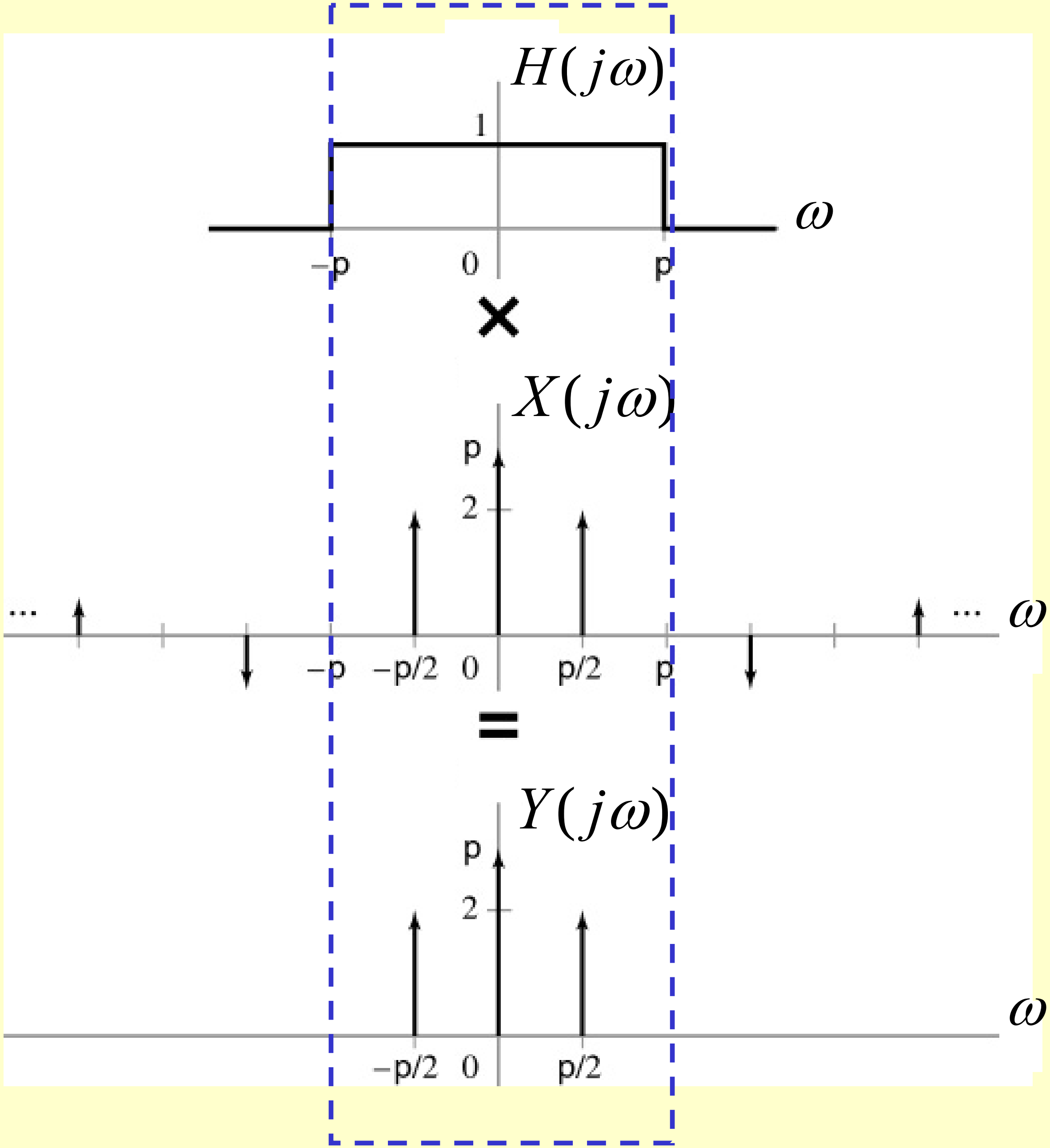

$X(j\omega)$
2pX[0]
2pX[2]
$-\omega_0$
ω_0
ω
$-4\omega_0$
0
$4\omega_0$
2pX[1]
×
$H(j\omega)$
ω
0
=
$2\pi X[0]H(j0)$
$2\pi X[2]H(j2\omega_0)$
ω
$-2\omega_0$
0
$2\omega_0$
$2\pi X[1]H(j\omega_0)$

Example 4.4

LTI系統脈衝響應 h(t) = (1/πt) sin(πt)，試以摺積性質求該系統的輸出=？ 輸入方波如下圖



基本頻率： $\omega_0 = 2\pi / 4 = \dfrac{\pi}{2}$


H(jω)
1
ω
−p
0
p
×
X(jω)
p
2
…
…
ω
−p
−p/2
0
p/2
p
=
Y(jω)
p
2
ω
−p/2
0
p/2

Ex. 4.4 Solution

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{-j\frac{k\pi}{2}t}\, dt = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{-jk\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}t} \Bigg|_{-1}^{1} \right)$$

$$= \frac{1}{-jk2\pi}\left[e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{jk2\pi}\left[e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Solution: (cont.)

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\underline{e^{j\frac{k\pi}{2}t}} \overset{FT}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\underline{\left(2\pi\,\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)\right)}=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\cdot\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}\cdot\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k}\cdot\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{2}\right)$$

Solution: (cont.)

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = 2\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta(\omega) + 2\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

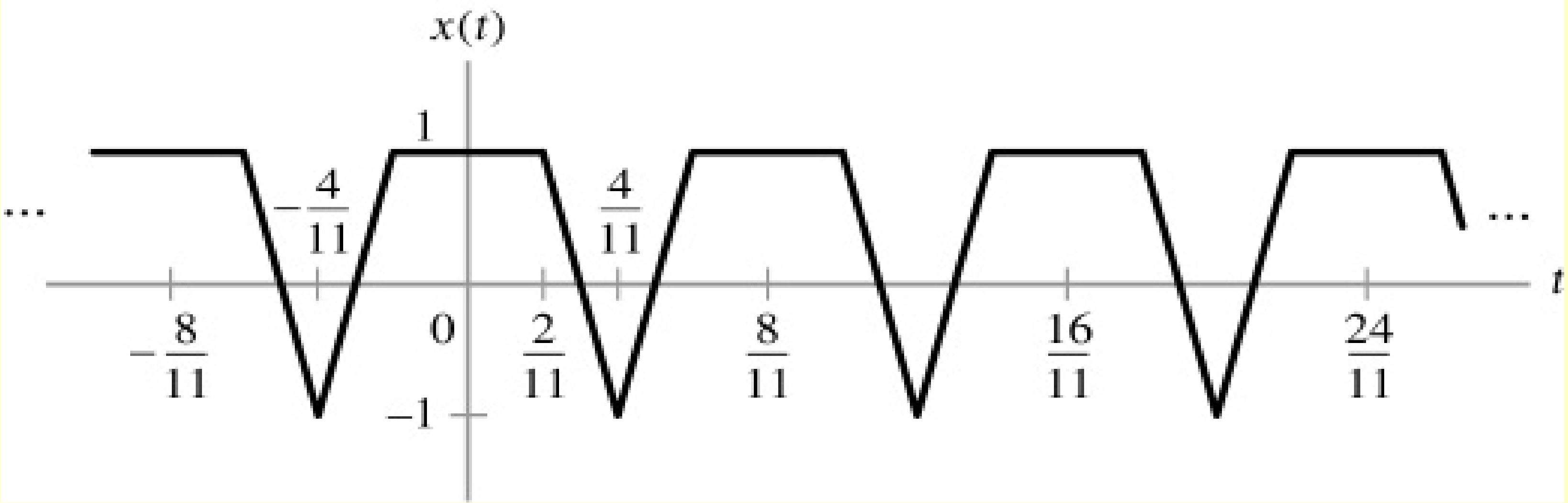
$\updownarrow FT$ {以頻率平移方式 快速轉換}

$$y(t) = \frac{1}{\pi}e^{j\frac{\pi}{2}t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left((e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t})/2\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

Problem 4.4

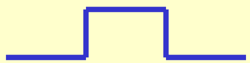
LTI系統脈衝響應 h(t) = 2cos(4πt) sin(πt)/(πt)，試以FT 求該系統的輸出=？ 輸入如下圖：



週期 T = 8/11;　　　ω_0 = 2π/T = 11π/4

P 4.4 Solution

Hint: h(t) = 2cos(4πt) sin(πt)/(πt)，

sin(πt)/(πt) ↔  有效寬度 W = ±π

2cos(4πt): 頻率左、右平移至 ±4π 位置 ？

∴H(jω) = 理想的band pass filter

學生試以 FT 求該系統的輸出=？ Solution: y(t) = 0

Multiplication of Periodic and Non-periodic Signal

週期與非週期性訊號的乘積

時域中的乘積運算相當於頻域中的<u>摺積運算</u>：

$$y(t) = g(t) \cdot x(t) \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} G(j\omega) * X(j\omega)$$

週期訊號若使用 FT 時可由頻率位移觀念 ：

$$x(t) \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta(\omega - k\omega_0)$$

其中 X[k] 為 FS 係數。

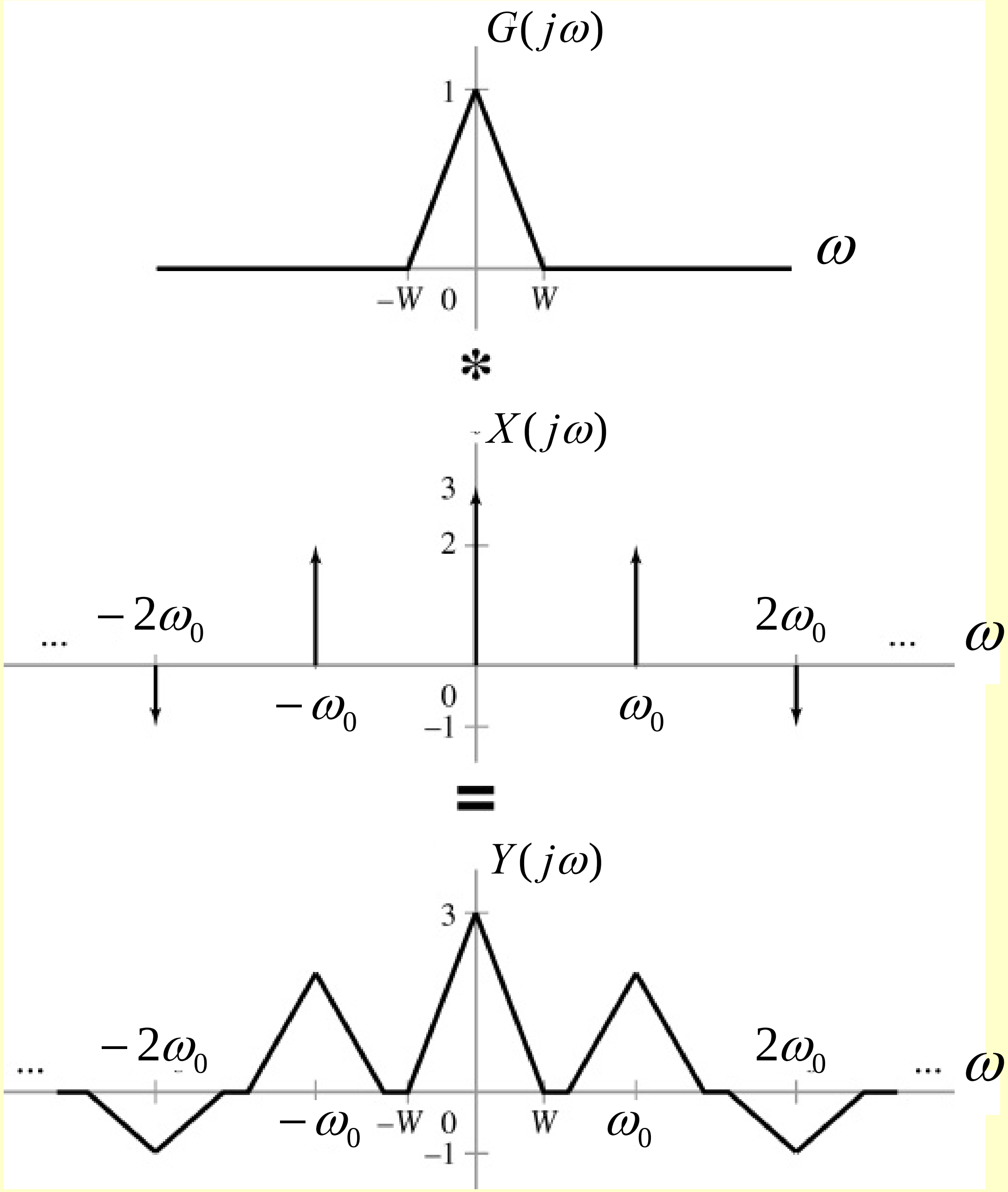
週期與非週期性訊號的乘積(cont.)

應用脈衝的篩選性質：

$$g(t)\cdot x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} G(j\omega)*\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta\left(\omega-k\omega_0\right)$$

$$\because G(j\omega)*\delta(\omega-k\omega_0)=G(j(\omega-k\omega_0)),$$

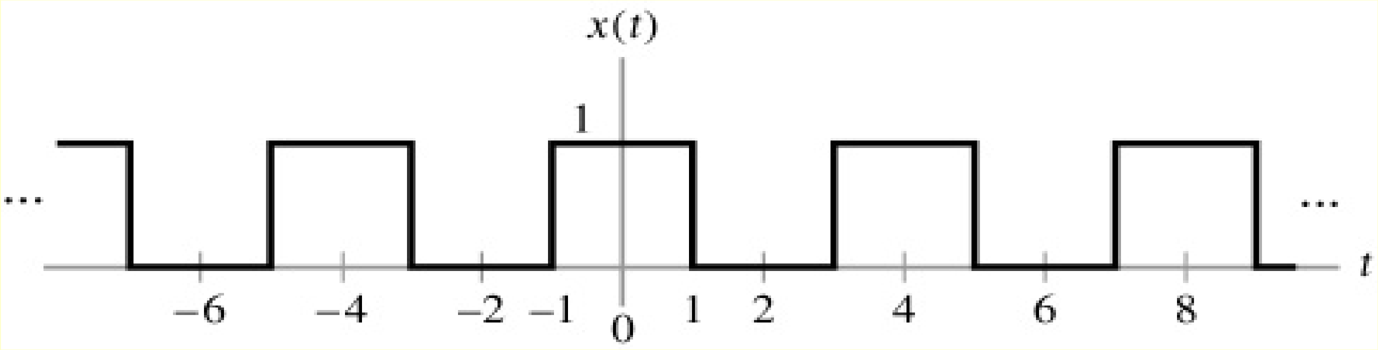
$$\boxed{y(t)=g(t)\cdot x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} Y(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,G\left(j(\omega-k\omega_0)\right)}$$


$G(j\omega)$
1
$-W$ 0 W
ω
*
$X(j\omega)$
3
2
0
-1
$-2\omega_0$
$-\omega_0$
ω_0
$2\omega_0$
...
ω
=
$Y(j\omega)$
3
-1
$-2\omega_0$
$-\omega_0$ $-W$ 0 W ω_0
$2\omega_0$
...
ω

Example 4.5

考慮 y(t) = g(t) x(t) 系統，

(a) 試求 Y(jω)，以 G(jω)表示
(b) 若 g(t)=cos(t/2)，試繪 Y(jω)



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Solution： The FS representation of x(t):

$$x(t) \overset{FS;\Omega_0=\frac{\pi}{2}}{\longleftrightarrow} X[k] = \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k}$$

(a)

代入乘法性質:

$$y(t) = g(t)\cdot x(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = G(j\omega) * X(j\omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\, G\big(j(\omega - k\omega_0)\big)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k} G\big(j(\omega - k\pi/2)\big)$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}}$$

Solution (cont.)

(b) $g(t) = \cos(t/2), \quad \omega_c = \dfrac{1}{2}$

$$g(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \pi\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{1}{2}\right)$$

$$y(t) = g(t) \cdot x(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} Y(j\omega) = G(j\omega) * X(j\omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\, G\big(j(\omega - k\omega_0)\big)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k} G\big(j(\omega - k\pi/2)\big)$$

Solution (cont.)

$$y(t) = g(t) \cdot x(t) \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad Y(j\omega) = G(j\omega) * X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\, G\big(j(\omega - k\omega_0)\big)$$

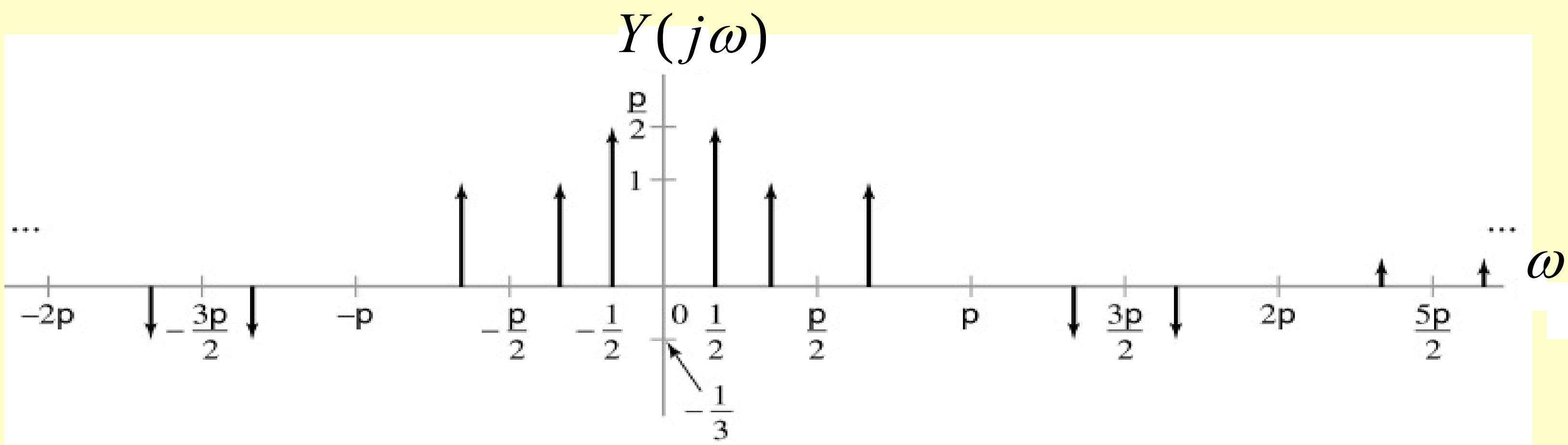
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k} \underline{G\big(j(\omega - k\pi/2)\big)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{\pi k} \left(\underline{\pi\delta\left(\omega - \frac{1}{2} - k\pi/2\right) + \pi\delta\left(\omega + \frac{1}{2} - k\pi/2\right)} \right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} \left(\delta\left(\omega - \frac{1}{2} - k\pi/2\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2} - k\pi/2\right) \right)$$

Solution for Example 4.5 (b)

$$Y(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(k\pi/2)}{k}\left(\delta\left(\omega-\frac{1}{2}-k\pi/2\right)+\delta\left(\omega+\frac{1}{2}-k\pi/2\right)\right)$$



Example 4.6

在頻域中，試分析乘法性質調幅(AM)原理

發射訊號： $r(t)=m(t)\cdot\cos(\omega_c t)$

m(t): 調變訊號

cos(ω_c t): 載波訊號 $\cos(\omega_c t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)$

$$r(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} R(j\omega)=\frac{1}{2\pi}M(j\omega)*\left[\pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)\right]$$

$$=\frac{1}{2}M(j(\omega-\omega_c))+\frac{1}{2}M(j(\omega+\omega_c))$$

接收訊號：

$$g(t)=r(t)\cdot\cos(\omega_c t) \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}R(j(\omega-\omega_c))+\frac{1}{2}R(j(\omega+\omega_c))$$

cos(ω_c t): 本地振盪訊號 $\cos(\omega_c t) \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad \pi\,\delta(\omega-\omega_c)+\pi\,\delta(\omega+\omega_c)$

$$g(t) \quad \overset{FT}{\leftrightarrow} \quad G(j\omega)=\frac{1}{2\pi}R(j\omega)*[\pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)]$$

$$=\frac{1}{2}R(j(\omega-\omega_c))+\frac{1}{2}R(j(\omega+\omega_c))$$

代入 m(t): 調變訊號的 spectrum M(jω) :

$$R(j\omega)=\frac{1}{2}M(j(\omega-\omega_c))+\frac{1}{2}M(j(\omega+\omega_c))$$

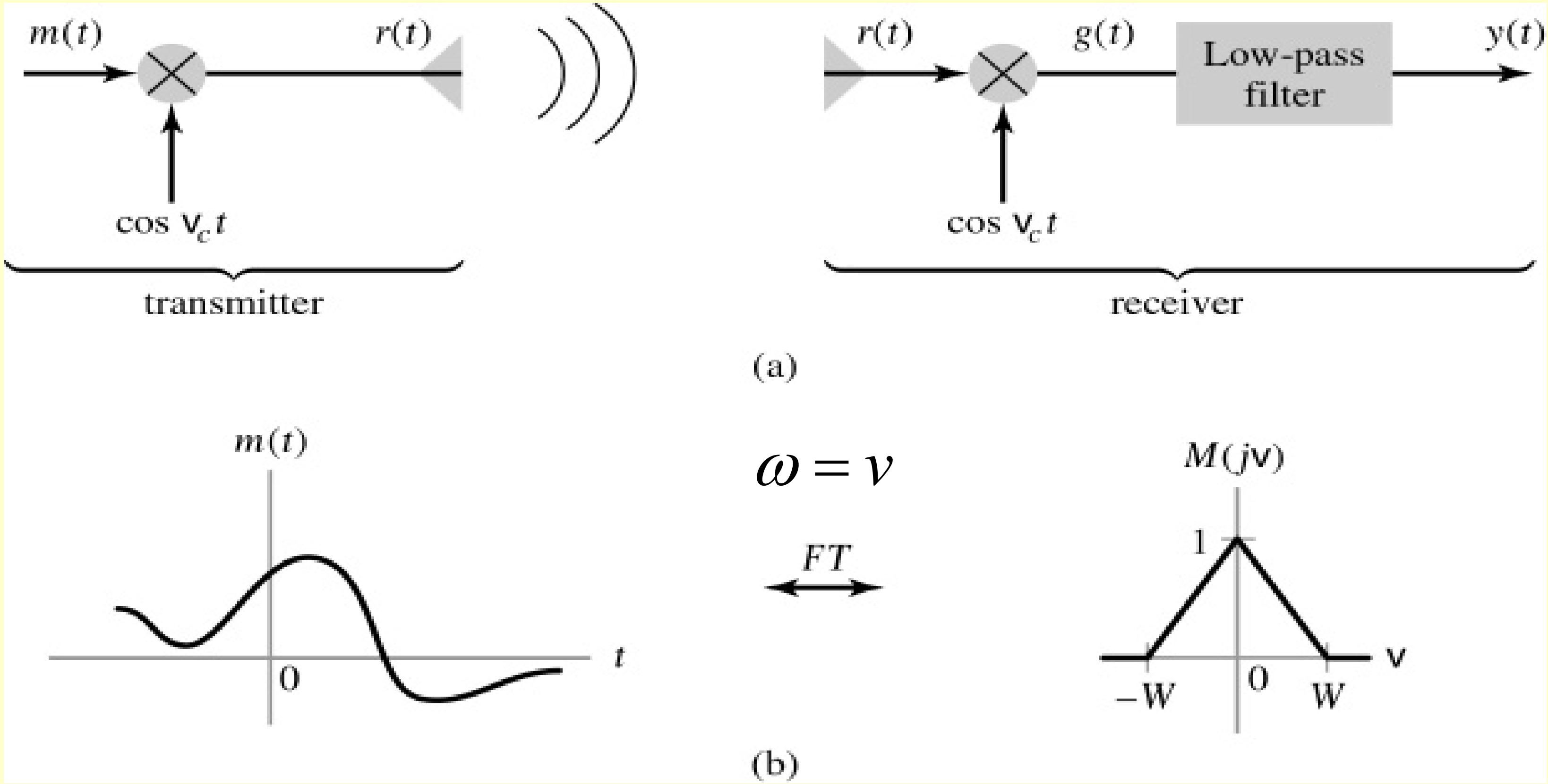
接收訊號經本地振盪級訊號的 spectrum G(jω) :

$$g(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} G(j\omega)$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}M(j(\omega-\omega_c-\omega_c))+\frac{1}{2}M(j(\omega-\omega_c+\omega_c))\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}M(j(\omega+\omega_c-\omega_c))+\frac{1}{2}M(j(\omega+\omega_c+\omega_c))\right]$$

$$=\frac{1}{4}M(j(\omega-2\omega_c))+\frac{1}{2}M(j(\omega))+\frac{1}{4}M(j(\omega+2\omega_c))$$



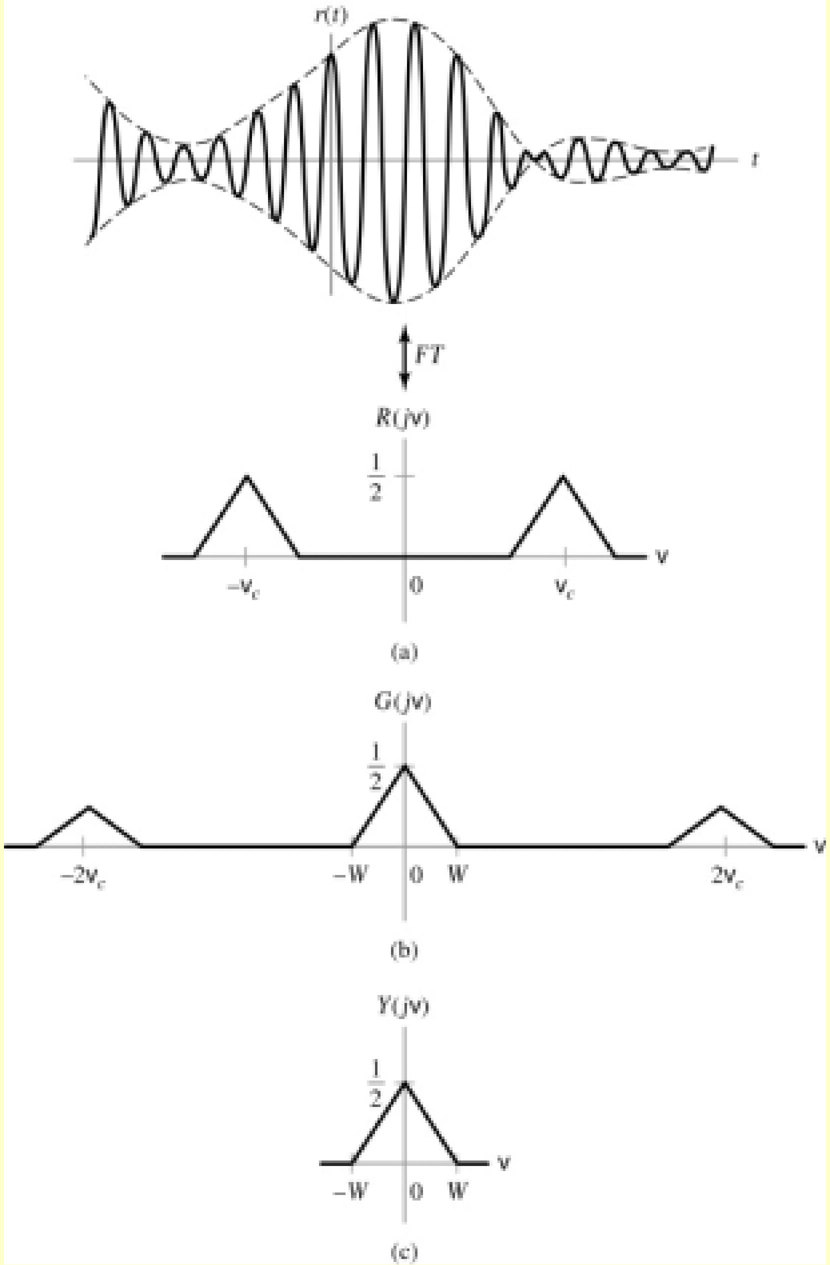
(a) Simplified AM radio transmitter and receiver.

(b) Spectrum of message signal.

Signals in the AM Transmitter and Receiver

Signals in the AM transmitter and receiver.

(a) Transmitted signal *r*(*t*) and spectrum *R*(*j*ω).
(b) Spectrum of *q*(*t*) in the receiver.
(c) Spectrum of receiver output y(t).



Example 4.7

利用乘法性質來分析訊號截斷對DTFT 的影響
(僅使用 2M+1個 x[n]訊號值)

$$x[n]=\cos\left(\frac{7\pi}{16}n\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{16}n\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\frac{7\pi}{16}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{7\pi}{16}n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{9\pi}{16}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{9\pi}{16}n}$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2}2\pi\delta\left(\Omega-\frac{7\pi}{16}\right)+\frac{1}{2}2\pi\delta\left(\Omega+\frac{7\pi}{16}\right)\frac{1}{2}2\pi\delta\left(\Omega-\frac{9\pi}{16}\right)+\frac{1}{2}2\pi\delta\left(\Omega+\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$=\pi\delta\left(\Omega-\frac{7\pi}{16}\right)+\pi\delta\left(\Omega+\frac{7\pi}{16}\right)+\pi\delta\left(\Omega-\frac{9\pi}{16}\right)+\pi\delta\left(\Omega+\frac{9\pi}{16}\right)$$

Ex 4.7 Solution

y[n] 是被截斷的 x[n] 信號

$$y[n] = x[n] \cdot w[n]$$

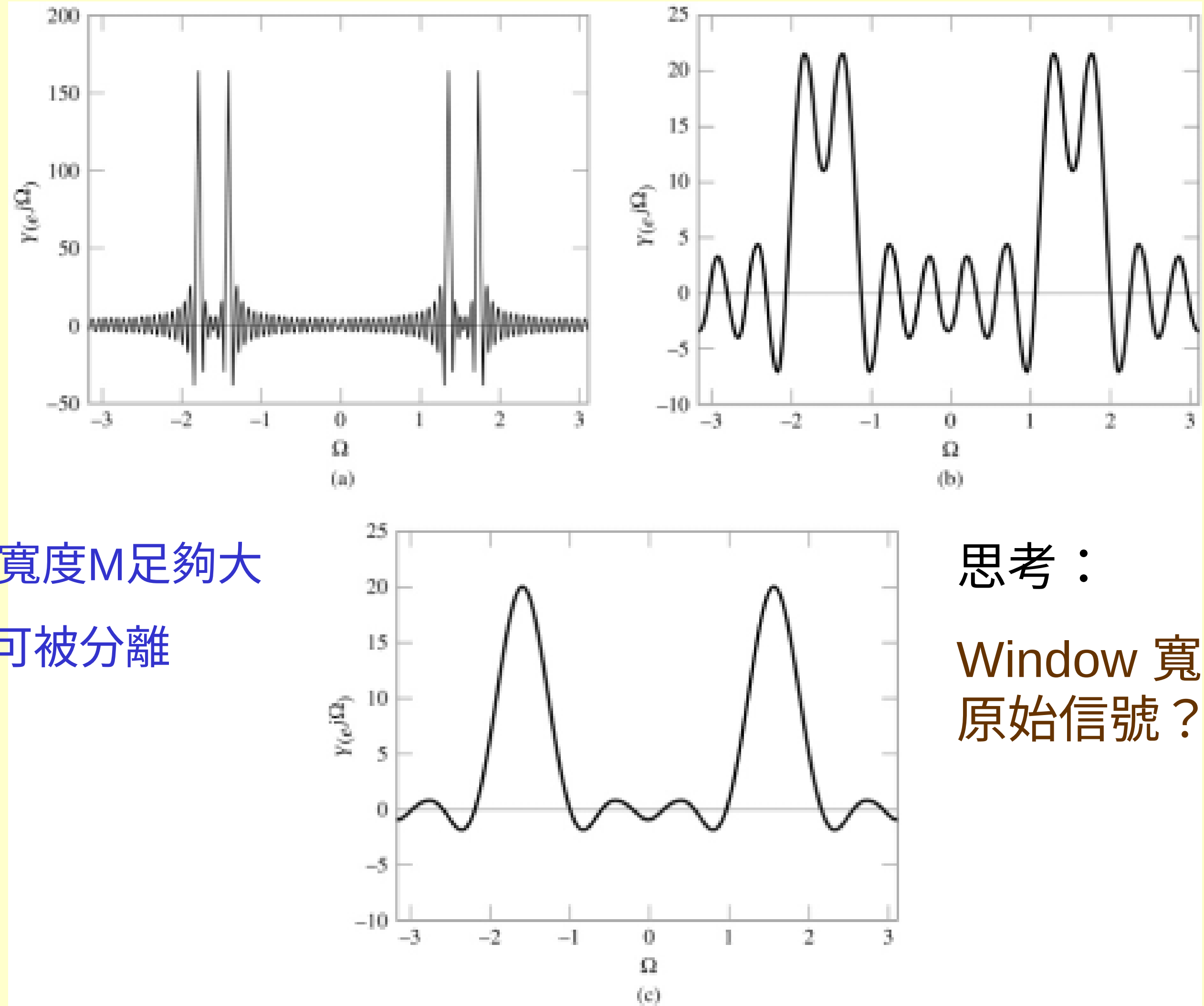
$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le M \\ 0, & |n| > M \end{cases}$$

$$W\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{\sin\left(\Omega(2M+1)/2\right)}{\sin(\Omega/2)},$$

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \pi\delta\left(\Omega - \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{7\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega - \frac{9\pi}{16}\right) + \pi\delta\left(\Omega + \frac{9\pi}{16}\right),$$

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi} X\left(e^{j\Omega}\right) * W\left(e^{j\Omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(W\left(e^{j(\Omega - \frac{7\pi}{16})}\right) + W\left(e^{j(\Omega + \frac{7\pi}{16})}\right) + W\left(e^{j(\Omega - \frac{9\pi}{16})}\right) + W\left(e^{j(\Omega + \frac{9\pi}{16})}\right)\right)$$



若Window寬度M足夠大

Ω_1 和 Ω_2 可被分離

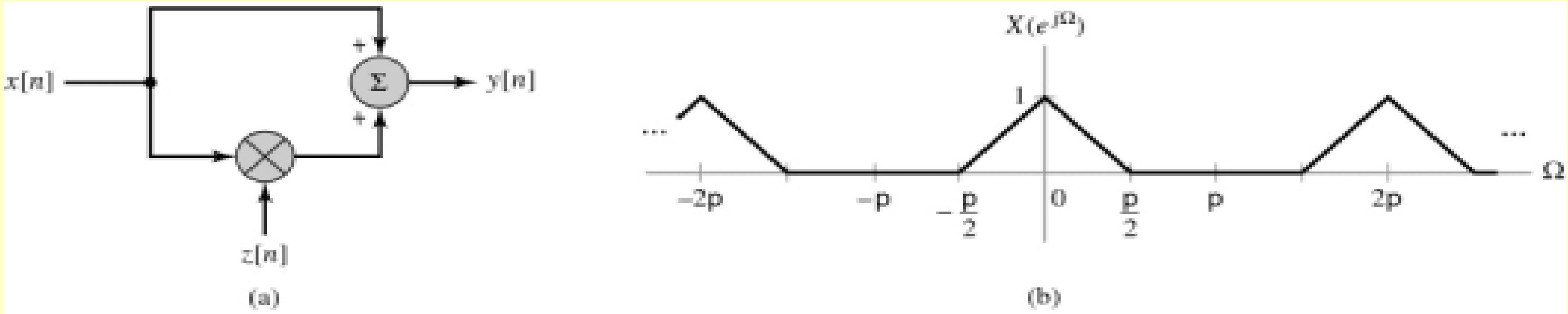
思考：

Window 寬度如何影響原始信號？

Effect of windowing a data record. $Y(e^{j\Omega})$ for different values of M, assuming that $\Omega_1 = 7\pi/16$ and $\Omega_2 = 9\pi/16$.
(a) M = 80, (b) M = 12, (c) M = 8.

Problem 4.7

參考下圖系統與輸入，試求輸出的DTFT



系統功能： $y[n] = x[n] + x[n] \cdot z[n]$

系統控制： $(a) \quad z[n] = (-1)^n$

$(b) \quad z[n] = 2\cos\left(\pi n / 2\right)$

Solution:

$$(a) \quad z[n] = (-1)^n = e^{-j\pi n} \quad \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \quad Z\left(e^{j\Omega}\right) = 2\pi\,\delta\left(\Omega - \pi\right)$$

$$y[n] = x[n] + x[n]\cdot z[n] \quad \overset{DTFT}{\leftrightarrow} \quad Y(e^{j\Omega})$$

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) * 2\pi\,\delta\left(\Omega - \pi\right)$$

$$= X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega-\pi)})$$

Solution:

$$(b) \quad z[n] = 2\cos(n\pi/2) \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Z\left(e^{j\Omega}\right) = 2\pi\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)$$

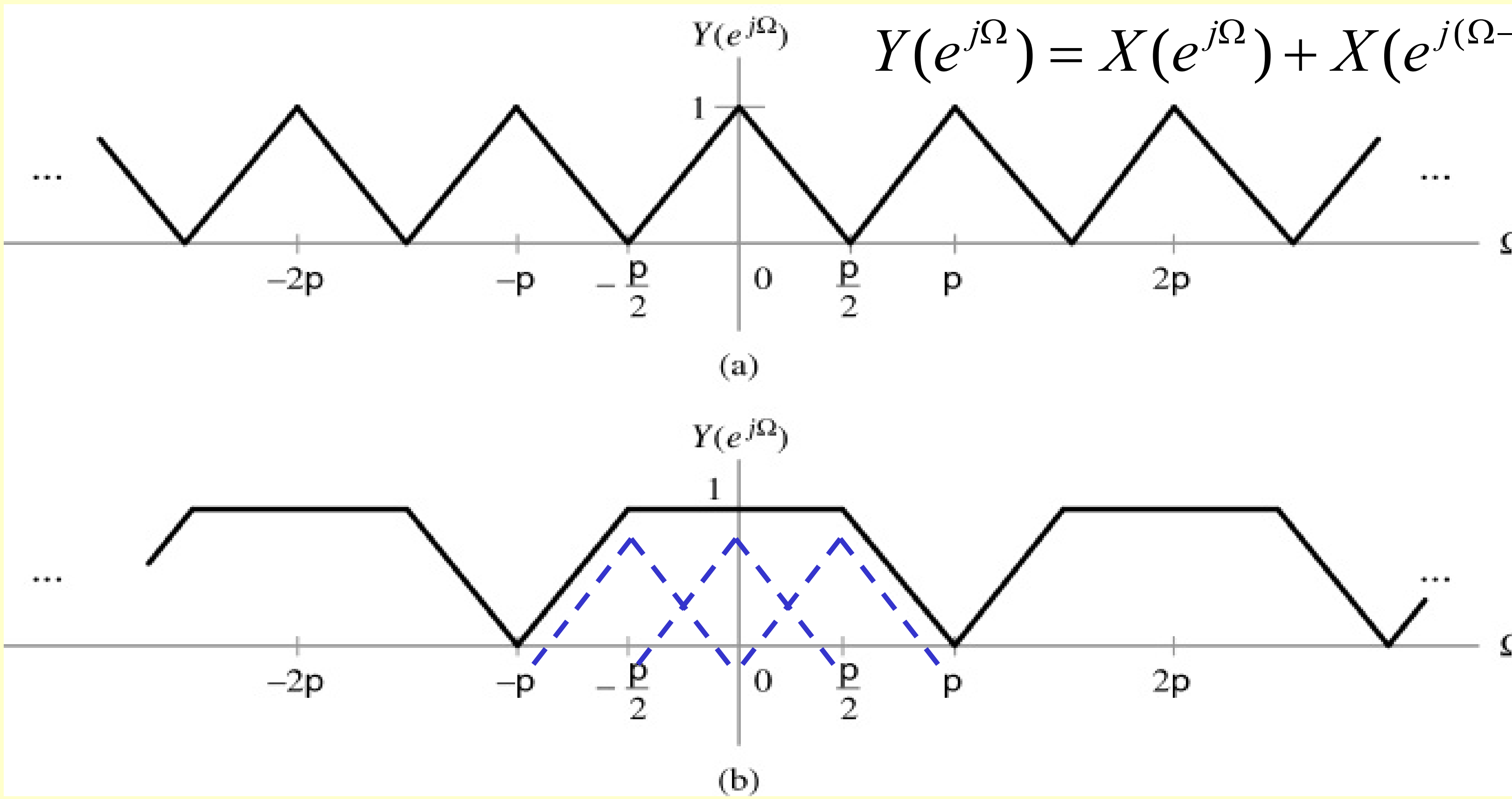
$$y[n] = x[n] + x[n]\cdot z[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} Y(e^{j\Omega})$$

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + \frac{1}{2\pi}X(e^{j\Omega}) * \left(2\pi\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega - \frac{\pi}{2})}) + X(e^{j(\Omega + \frac{\pi}{2})})$$

Solutions to Problem 4.7：

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega-\pi)})$$



$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega}) + X(e^{j(\Omega-\frac{\pi}{2})}) + X(e^{j(\Omega+\frac{\pi}{2})})$$

討論 FT 如何用於離散時間性訊號

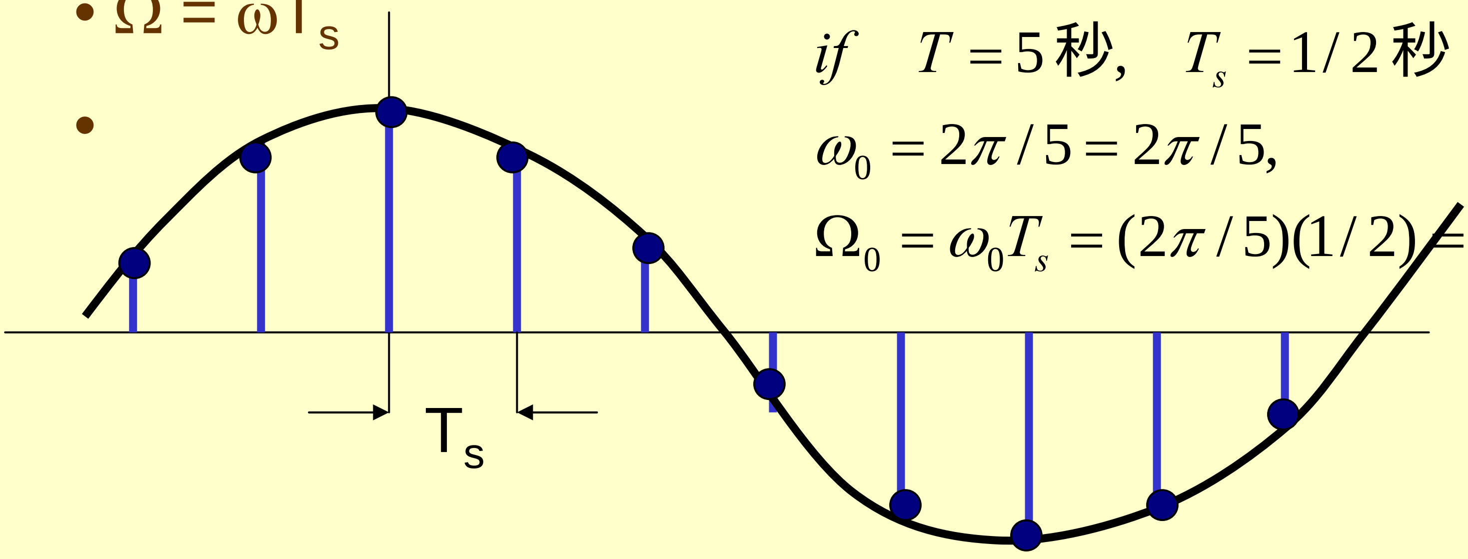
- 建立連續時間頻率ω與離散時間頻率Ω之對應關係
  - $x(t) = e^{j\omega t}$ 對應關係 $g[n] = x(nT_s) = e^{j\Omega n}$
  - $g[n] = x(nT_s)$
  - $\Omega = \omega T_s$
  -

$$Ex: \quad N = 10, \quad \therefore \Omega_0 = 2\pi / N = \pi / 5$$

$$if \quad T = 5\text{秒}, \quad T_s = 1/2\text{秒}$$

$$\omega_0 = 2\pi / 5 = 2\pi / 5,$$

$$\Omega_0 = \omega_0 T_s = (2\pi / 5)(1/2) = \pi / 5$$



建立 FT 與 DTFT 的關係

離散非週期時間訊號 x[n] 的DTFT: $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$

DTFT ←→ FT: ($\Omega = \omega T_s$)

$$X(j\omega) = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = \omega T_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega T_s n}$$

自變數 Ω 改成 ω 即可

$$X(j\omega) = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega = \omega T_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega T_s n}$$

$\because$

$$\delta(t - nT_s) \overset{FT}{\leftrightarrow} e^{-j\omega T_s n}$$

Time-shifting property

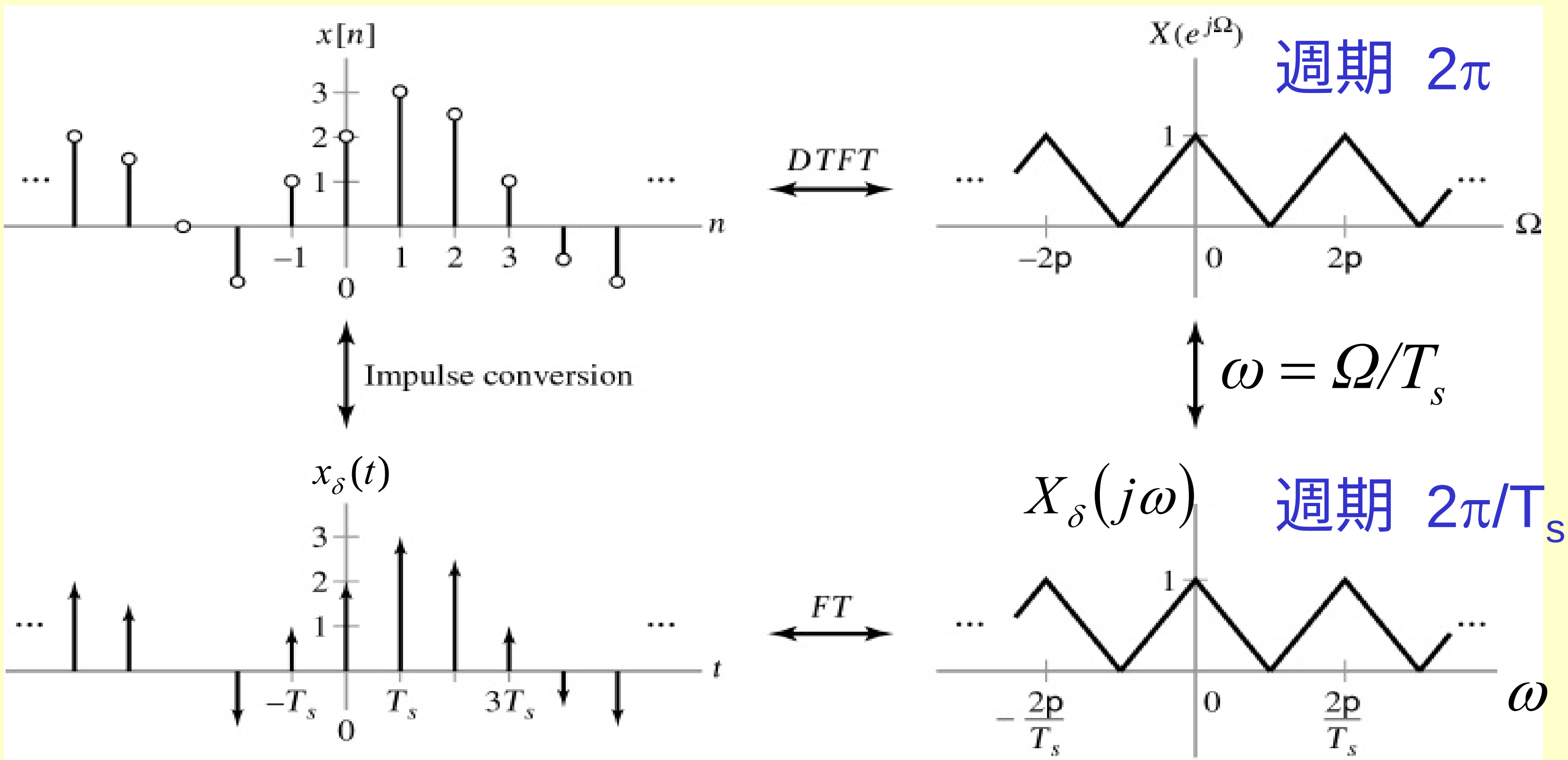
$\therefore$

$$x_\delta(t) = \underline{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\delta(t - nT_s)} \overset{FT}{\leftrightarrow} X_\delta(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega T_s n}$$

x[n] 的連續時間表示法

{Hint: 這頁總結DTNS 也可用 FT 表示法}

Relationship between FT and DTFT Representations of a Discrete-Time Signal



x[n] 的連續時間表示法

Example 4.8

試求下述的DTFT pair 相關的FT pair ＝?

$$x[n] = a^n u[n] \quad \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} \quad X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$

回憶：上述對應式如何獲得

Solution:

$$let \quad \Omega = \omega T_s$$

$$x(t) \quad \overset{FT}{\longleftrightarrow} \quad X(j\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega T_s}}$$

Problem 4.8

描繪下述離散訊號的FT 表示法

(a) $T_s = 1/2$

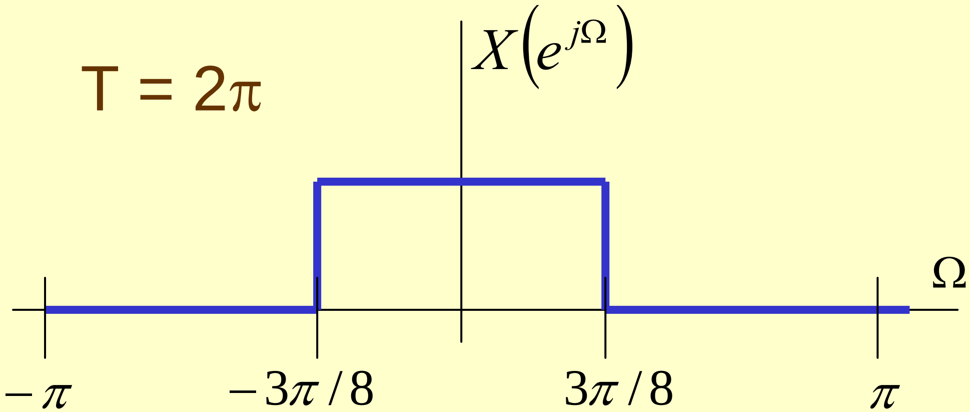
(b) $T_s = 3/2$

$$x[n] = \frac{\sin(3\pi n/8)}{\pi n}$$

Solution:

T = 2π

$$x[n] \overset{DTFT}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\Omega}\right)$$



Periodic Spectrum :

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n} = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le 3\pi/8 \\ 0, & 3\pi/8 < |\Omega| < \pi \end{cases}$$

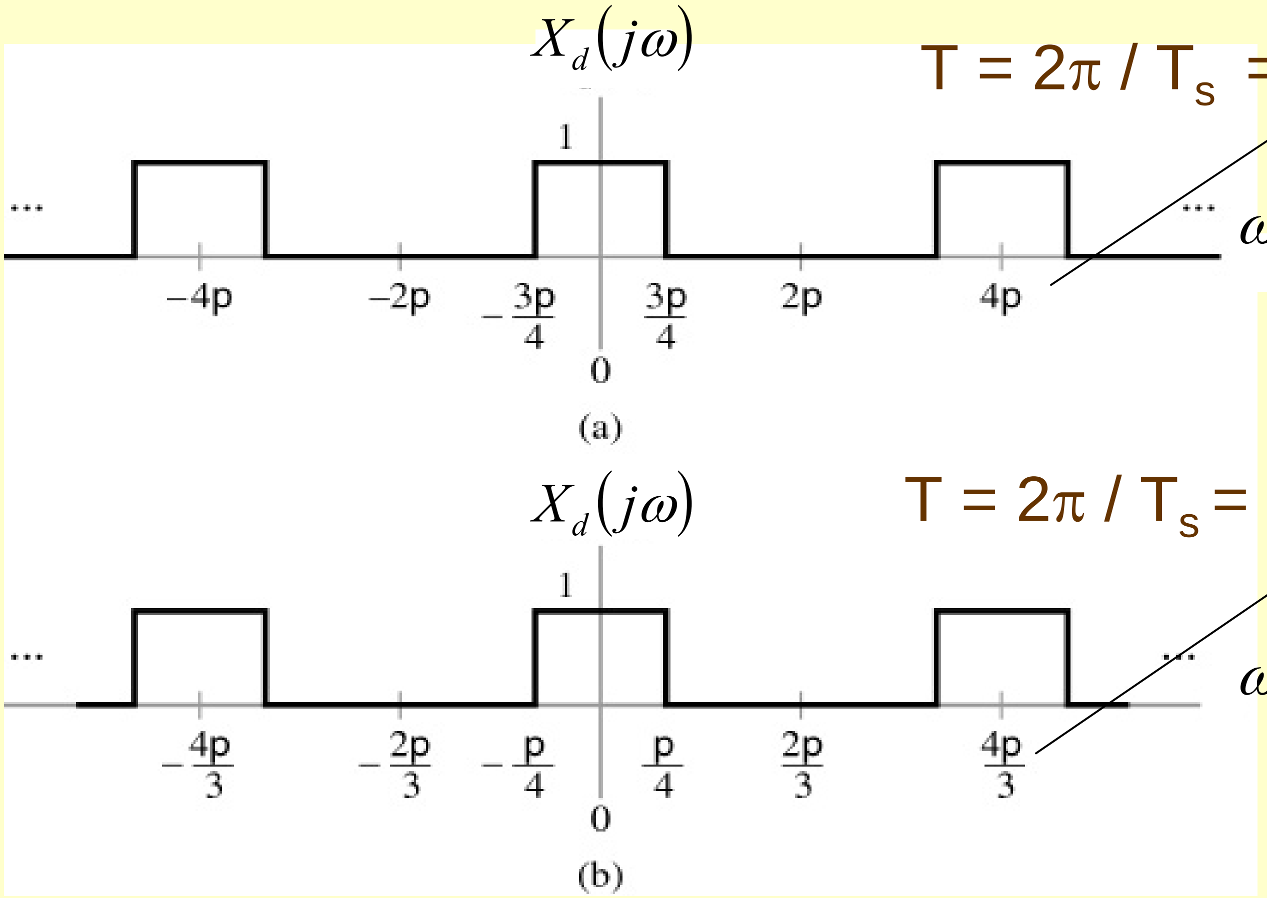
Solution: 雖以 FT 表示法， 仍然是 Periodic Spectrum

(a) $T_s = 1/2 \rightarrow \omega = \Omega/T_s = 2\,\Omega$

(b) $T_s = 3/2 \rightarrow \omega = \Omega/T_s = 2\,\Omega/3$

$T = 2\pi / T_s = 4\pi$

$T = 2\pi / T_s = 4\pi / 3$



建立 FT 與 DTFS 的關係

N 週期訊號 x[n] 的 DTFT 表示法：

$$x[n] \overset{DTFT}{\leftrightarrow} X(e^{j\Omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\,\delta\left(\Omega - k\,\Omega_0\right)$$

其中X[k] 是DTFS係數，另代入 $\Omega = \omega T_s$ 可得 FT 表示法：

$$x[n] \overset{FT}{\leftrightarrow} X\left(j\omega\right) = X(e^{j\omega T_s}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\,\delta\left(\omega T_s - k\,\Omega_0\right)$$

{Hint: 這頁總結DTPS 也可用 FT 表示法}

代入 $\Omega = \omega T_s$ 可得 FT 表示法：

$$x[n] \overset{FT}{\leftrightarrow} X(j\omega) = X(e^{j\omega T_s}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\,\delta(\omega T_s - k\Omega_0)$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\,\delta(T_s(\omega - k\Omega_0 / T_s))$$

另代入 脈衝比例變換性質： $\delta(a\omega) = \dfrac{1}{a}\delta(\omega)$

$$X(e^{j\omega T_s}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\,\delta(T_s(\omega - k\Omega_0 / T_s))$$

$$= \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]\,\delta((\omega - k\Omega_0 / T_s))$$

Problem 4.9 試求下述的離散時間訊號(DTPS)相關的FT pair = ?

$$x[n] = \cos(2\pi n / N)$$

Solution: 請學生繼續完成…

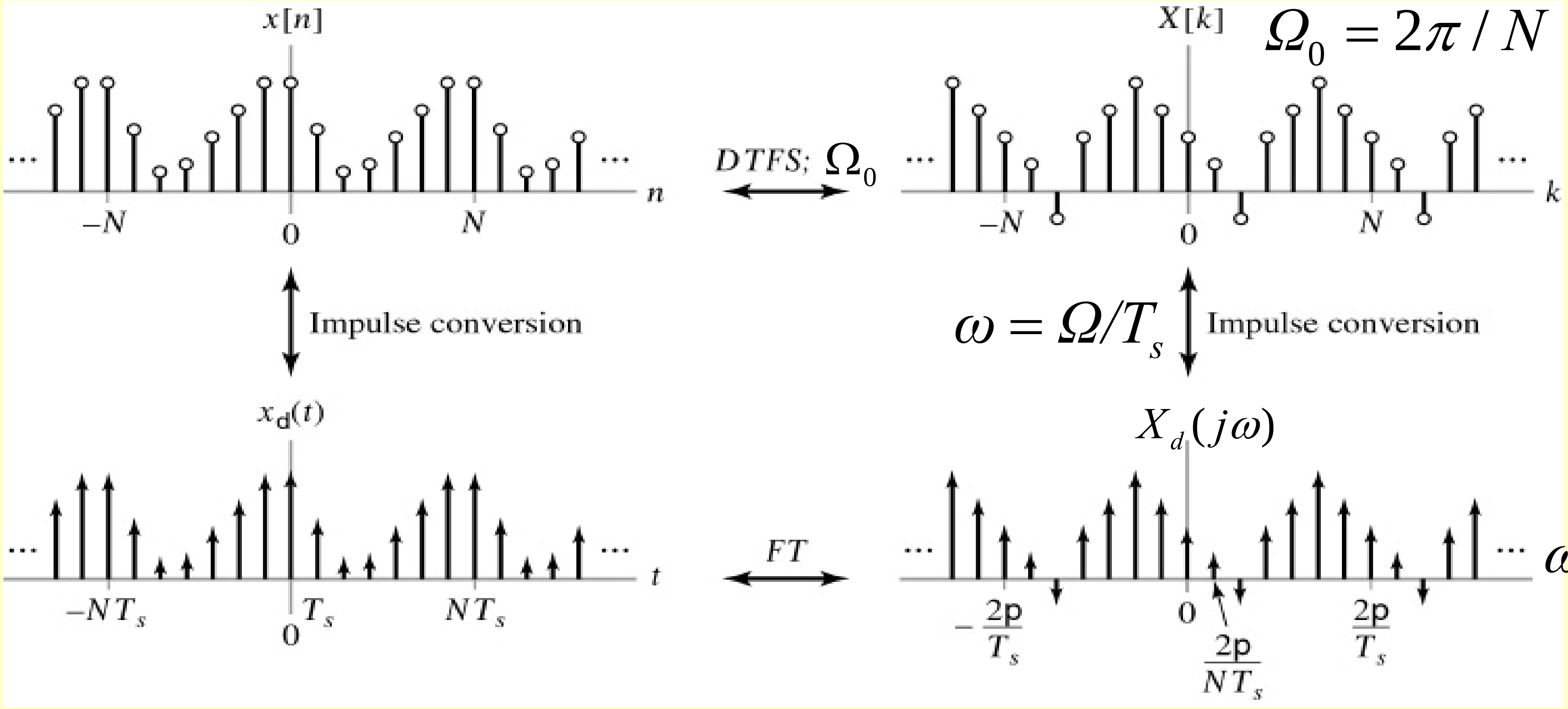
$$x[n] = \cos(2\pi n / N) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n};$$

$$period = N, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Hint: DTFS → DTFT 應用頻率位移性質

DTFT → FT 代入 $\Omega = \omega T_s$

Relationship between FT and DTFS representations of a discrete-time periodic signal



x[n] 的連續時間表示法　　　　x[n] 的連續頻譜表示法