



大地測量課程

重力場與重力測量 (Gravity Field & Gravimetry)

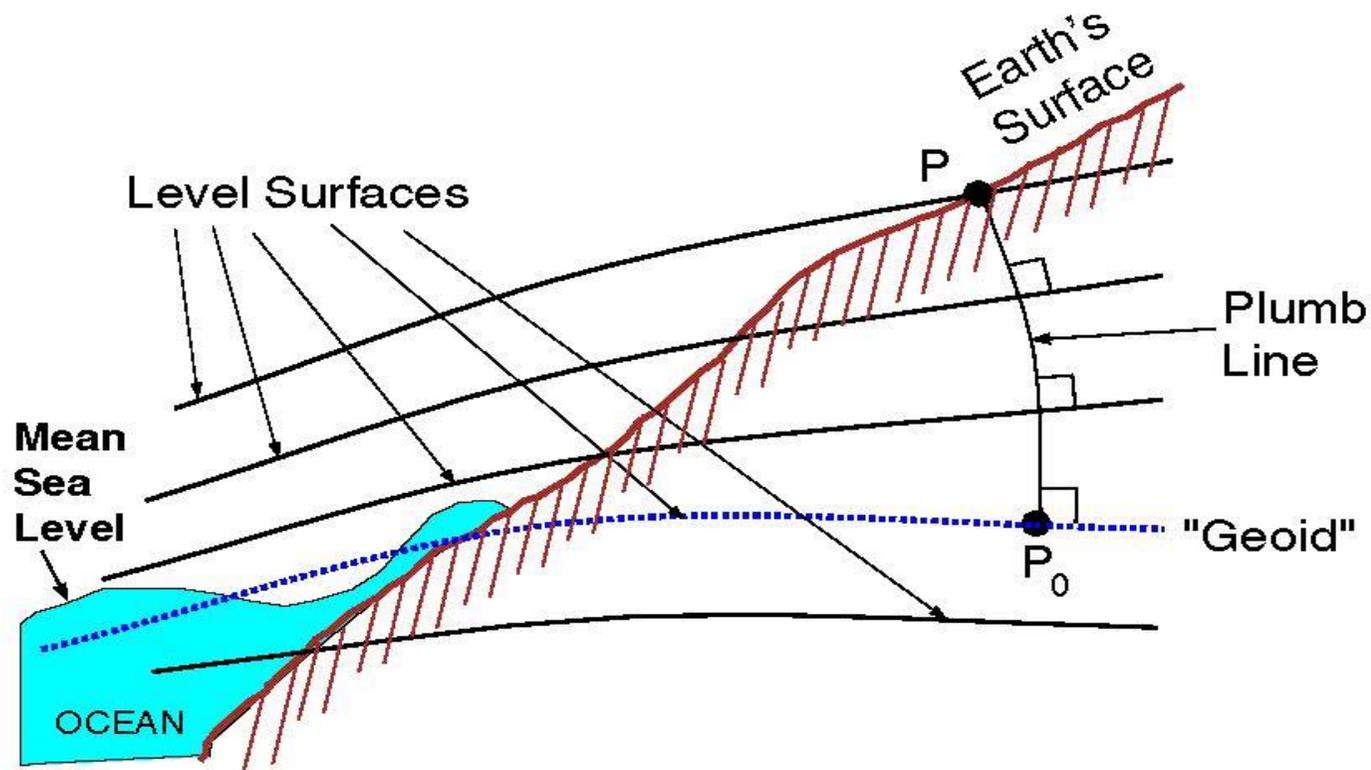
張嘉強

健行科技大學
應用空間資訊系





正高改正的解決方案



Level Surface = Equipotential Surface

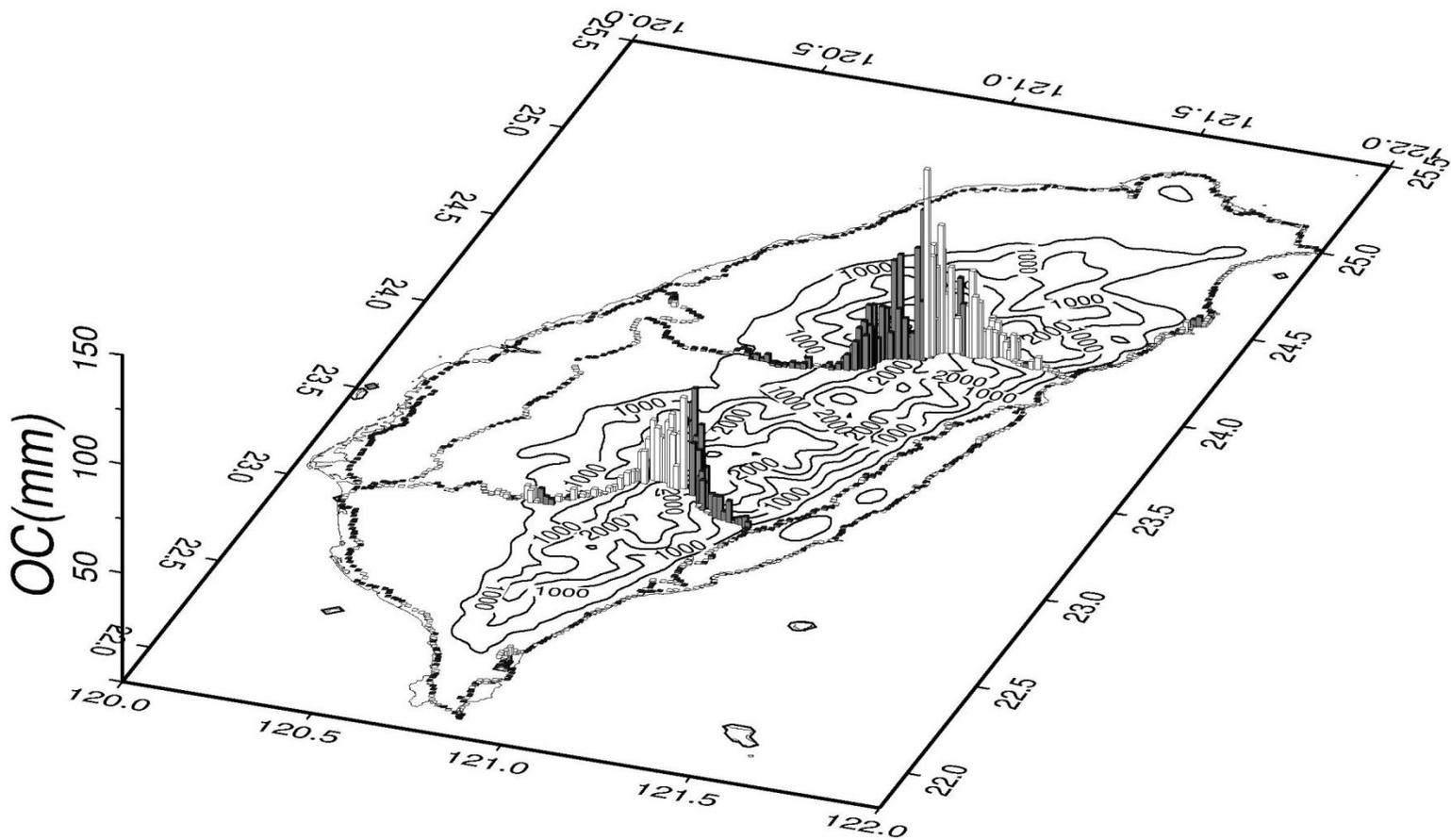
H (Orthometric Height) = Distance along Plumb line (P_0 to P)

$$\frac{1}{g_0} \left[H_A (\overline{g_A} - \overline{g_B}) + \Delta H (g_{AB} - \overline{g_B}) \right]$$

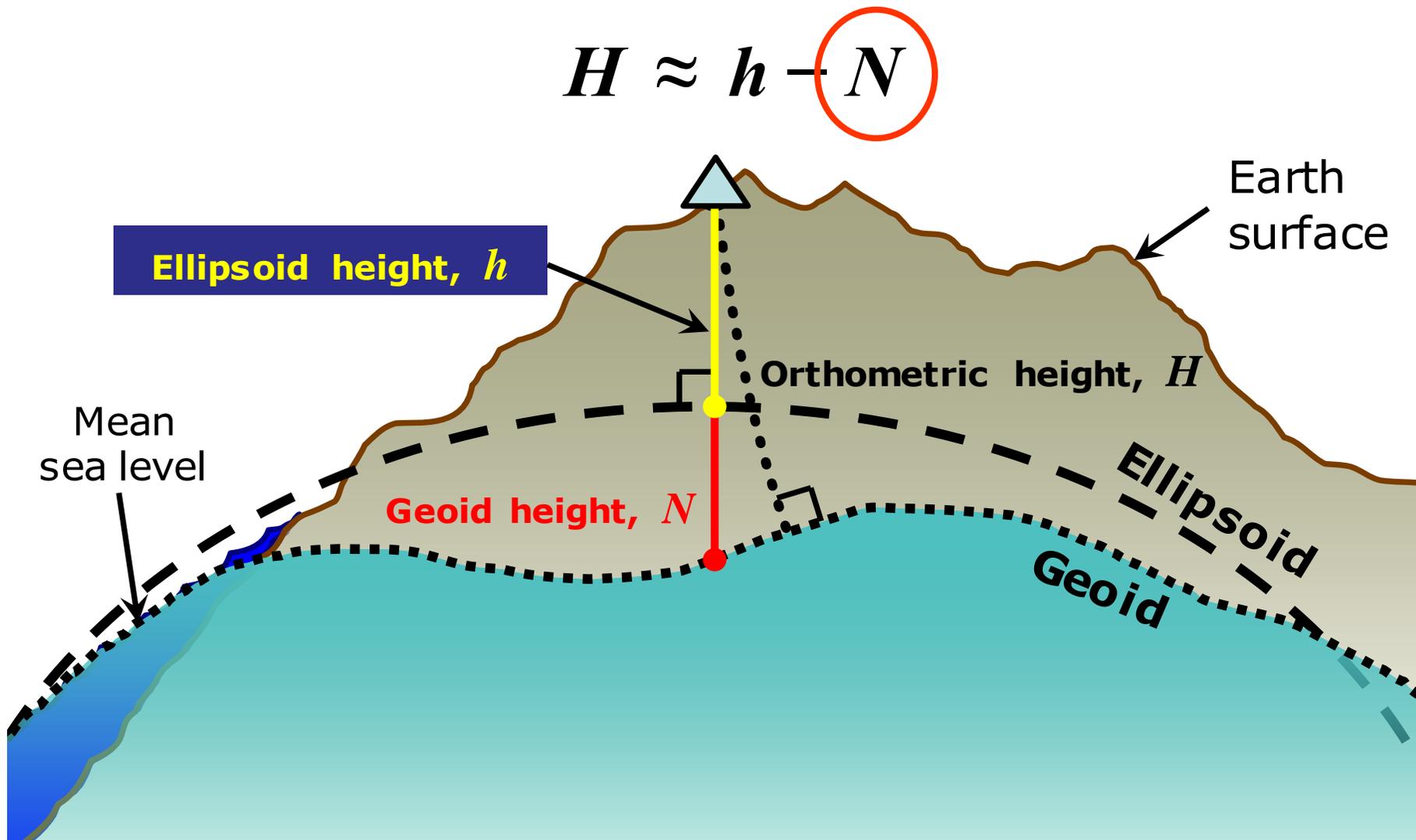




台灣的正高改正有多大?

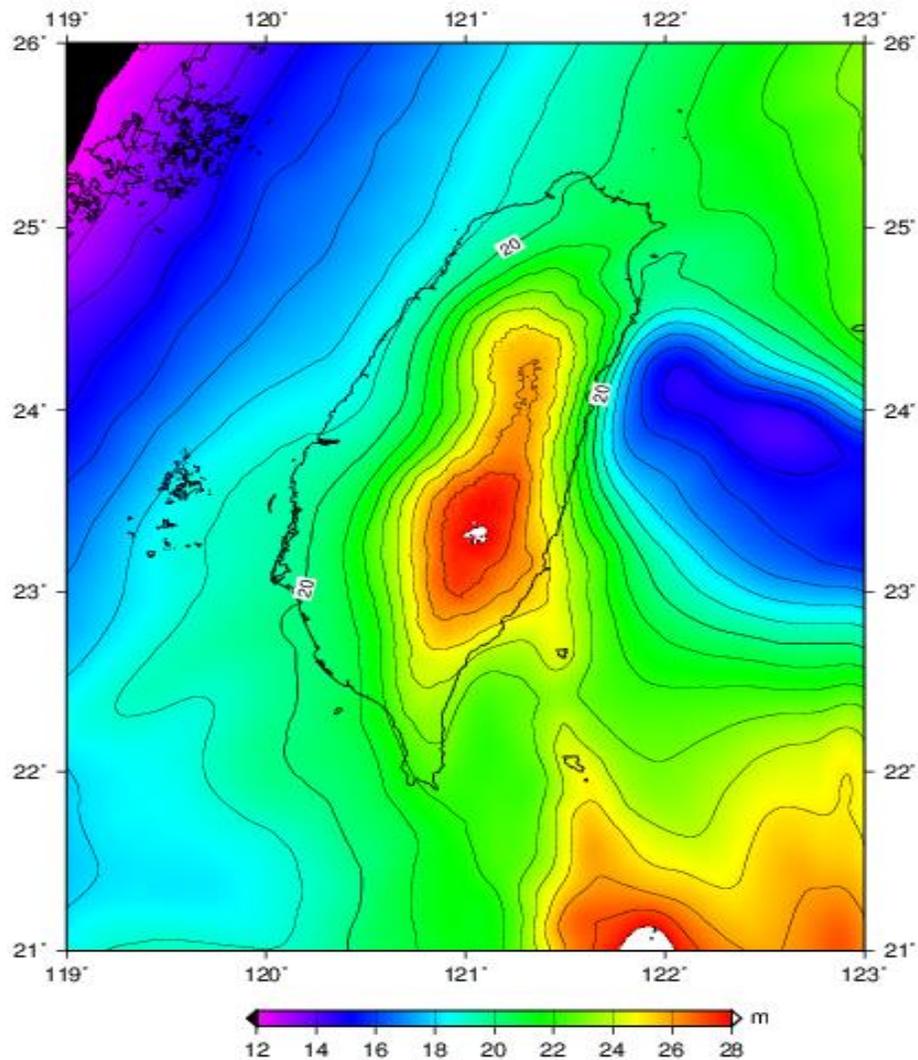


高程現代化的解決方案



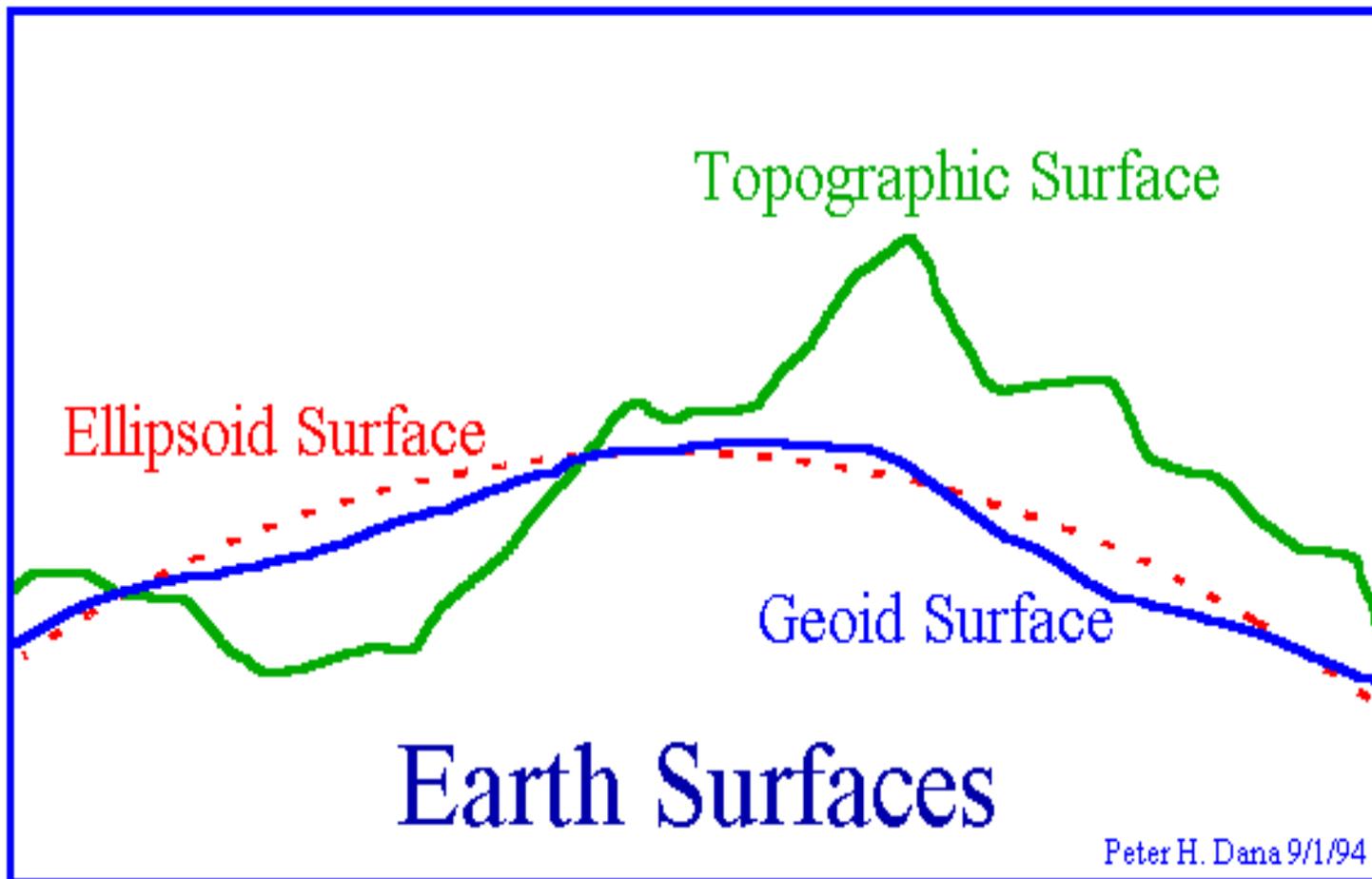


台灣的大地起伏有多大?



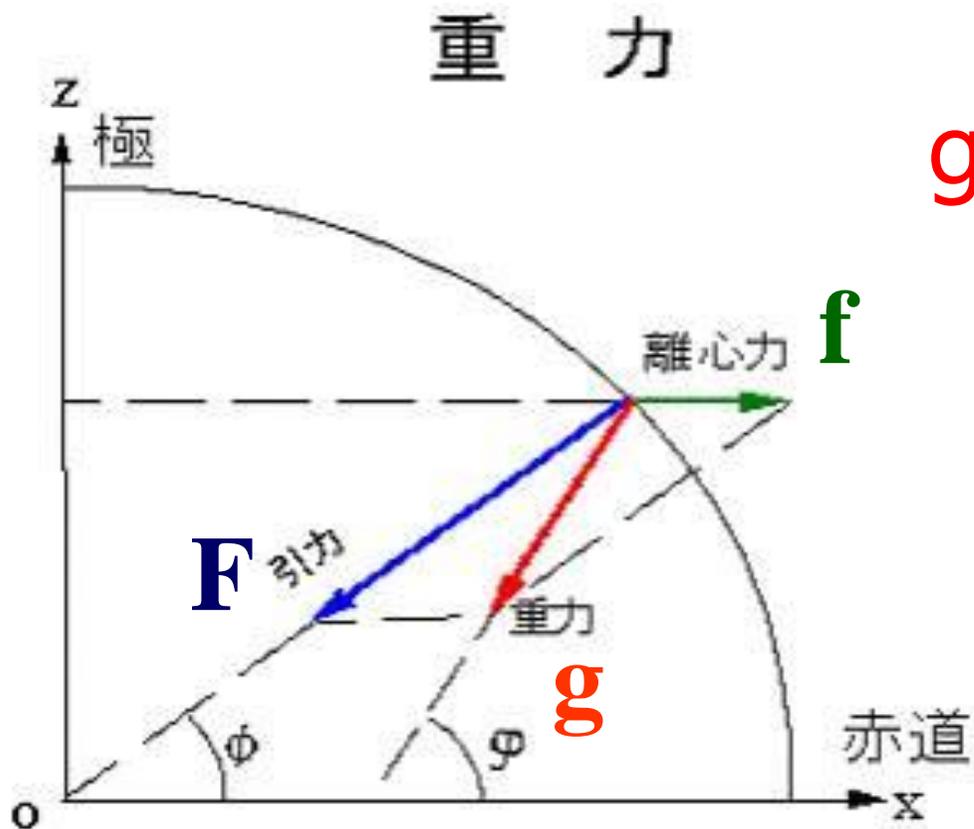


關鍵因素-大地水準面的測算





重力的定義

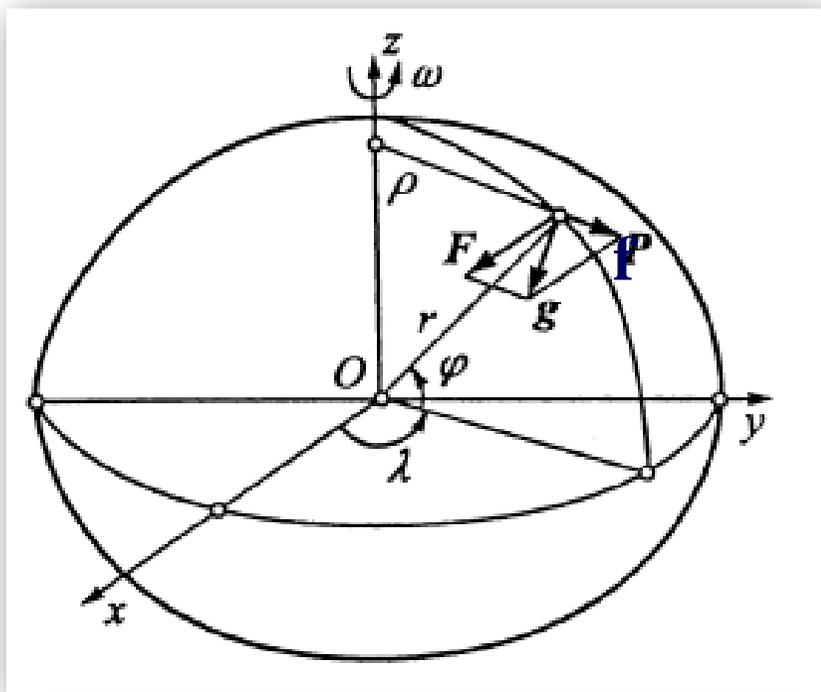


理論上，哪裡重力大？哪裡重力小？





引力及離心力



$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

$$f = m\omega^2 P$$

$$\begin{aligned} g &= F + f \\ &\cong 9.8 \text{ m/sec}^2 \\ &\cong 980 \text{ cm/sec}^2 \\ &\cong 980 \text{ gal} \\ &\cong 980,000 \text{ mgal} \end{aligned}$$





引力位及離心力位

$$W = V + Q \quad \text{重力位} = \text{引力位} + \text{離心力位}$$

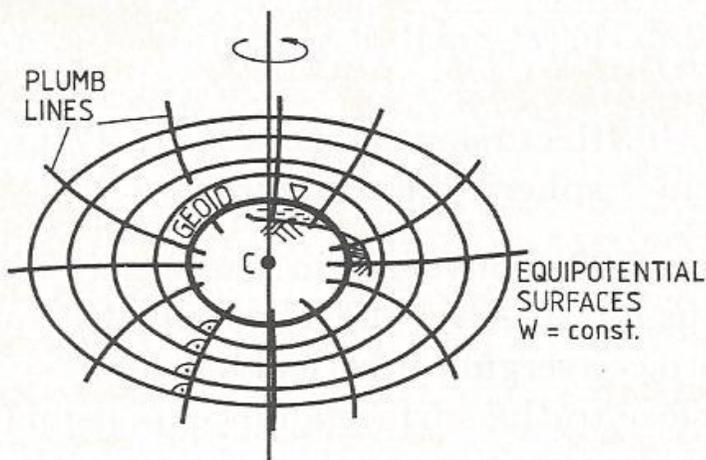
$$W = K \cdot \int \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

$$\Delta W = \Delta V + \Delta Q$$





等位面



$$dW = g \cdot dH \cdot \cos 180^\circ = -g \cdot dH$$

$$g = -\frac{dW}{dH}$$

重力=重力位的垂直梯度

- 海洋面忽略潮汐及波浪，可形成一理想面，稱之為水準面，該面上各點之位能相等，為一等位面
- 等面位上之各點因位能(W)相同但重力(g)不同，形成垂直離距(H)不同，導致：1. 等位面間互不平行；2. 垂線具有曲率





正常重力

- 以橢球為基準面所定義之理論重力

$$W = U + T \quad \text{重力位} = \text{正常重力位} + \text{擾動重力位}$$

$$U = V + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

正常重力位=引力位+離心力相關





正常重力計算式

- 嚴密式(Somigliana, 1929)

$$Y_{\varphi} = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

- GRS80橢球體之級數展開式

$$\gamma = 978032.7(1 + 0.0053024\sin^2 \varphi - 0.000058\sin^2 2\varphi)$$

輸入參數：測點之緯度





引力位球諧函數

$$V = \frac{KM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm} \cos \theta \right]$$

C_{nm} , S_{nm} : 球諧係數;

P : Legendre函數;

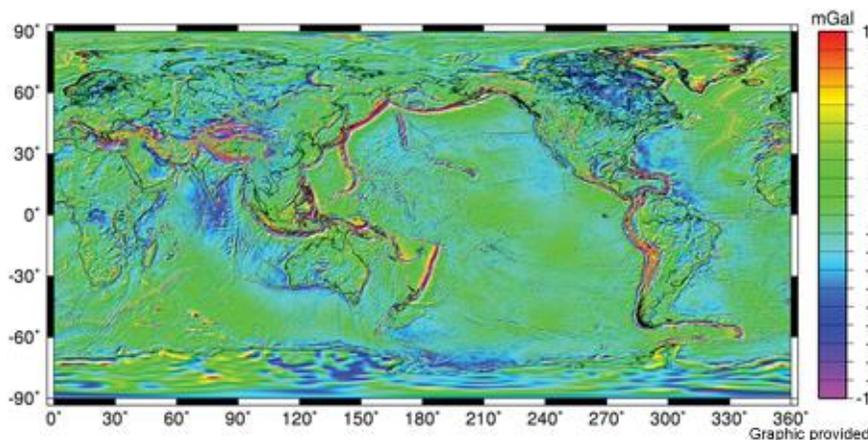
n, m : 函數的階次 (degree & order)



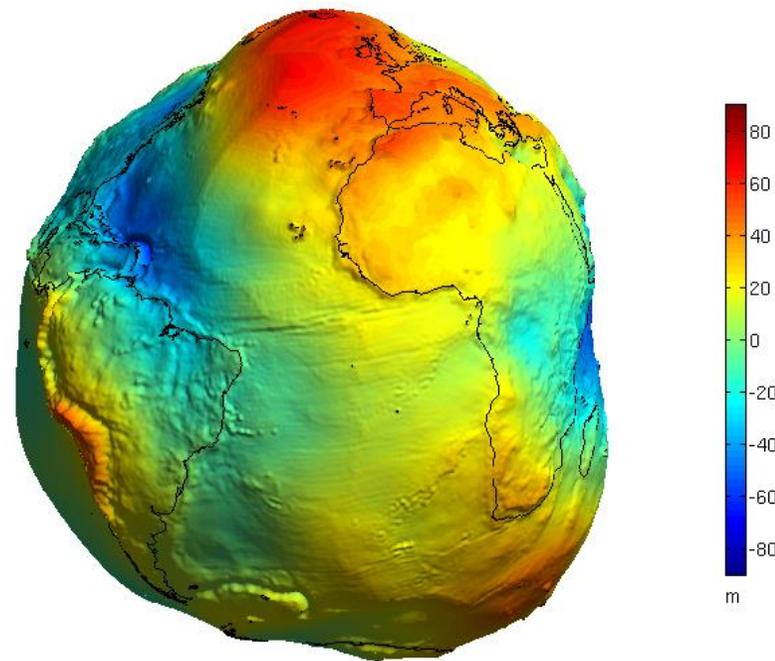


EGM2008

- 美國NGA制訂之Earth Geopotential Model
- 球諧函數之階次達2159（長波長之重力資訊）



重力異常 & 垂線偏差



Geoid height (EGM2008, nmax=500)

大地水準面

輸入參數:計算點之經緯度

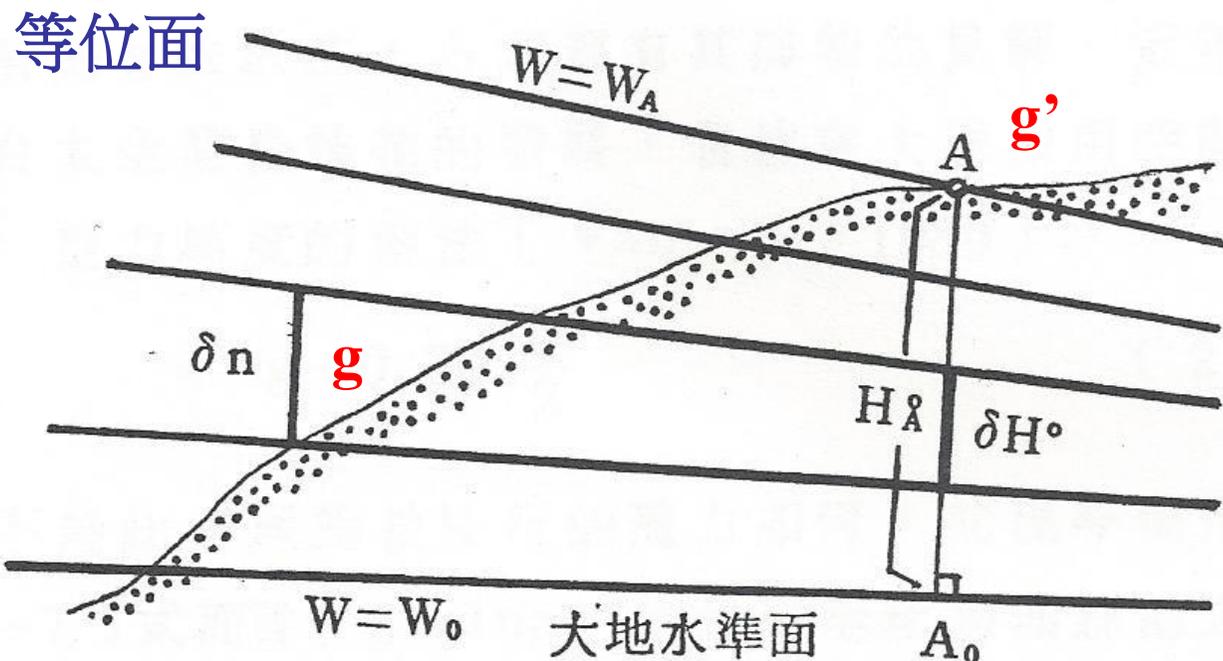




等位面不平行

問題: (1) 水準高差是否即是正高差? **No!**

(2) 水準閉合環線之觀測閉合差是否為零? **No!**



$$- \delta W = g \delta n = g' \delta H$$

$$\delta H = (g/g') \delta n \quad \because g \neq g' \quad \therefore \delta H \neq \delta n$$





大地位數

$$C = -(W_A - W_0) = W_0 - W_A = \int_0^A g \, dn$$

- 測點與大地水準面之間負的位能差
- 單位：gpu
1 gpu = 1000 gal x meter
- $C = gH \doteq 0.98H$ (大地位數與高程間之概略關係)

$$\oint g \, dn = -W_A + W_A = 0 \quad \text{水準環線之閉合差即會為零}$$





高程系統

- 正高 (Orthometric height)
- 正常高 (Normal height)
- 力高 (Dynamic height)





正高

- 地面測點沿垂線方向量至大地水準面之距離
- 由大地位數決定之算式如下：

$$H = \frac{C}{g}$$

- 該重力指地表測點沿垂線與大地水準面上相應點之間的平均重力
- 常用於西方國家(含我國)





正常高

- 地面測點沿垂線方向量至似大地水準面之距離
- 由大地位數決定之算式如下：

$$H^* = \frac{C}{\bar{\gamma}}$$

- 將正高系統無法精確測定之平均重力值改採正常重力平均值代替之高程

$$H_{\#} - H_{\text{正}} = \frac{g_m - \gamma_m}{g_m} H_{\#}$$

平地差異約 2.5 cm

山地可達 4 m

可在海面上重合

慣常使用於前蘇俄(含中國大陸)





力高

- 過測點水準面在緯度 45^0 處之正高
- 由大地位數決定之算式如下：

$$H^{\text{dyn}} = \frac{C}{\gamma_0}$$

- 該重力指緯度 45^0 處之正常重力值
- 常用於水利工程或鐵道工程
- 同一水準面上的二點正高會不相同(如大湖或水庫區)，但可在同一水準面上有相同之力高(如下頁)

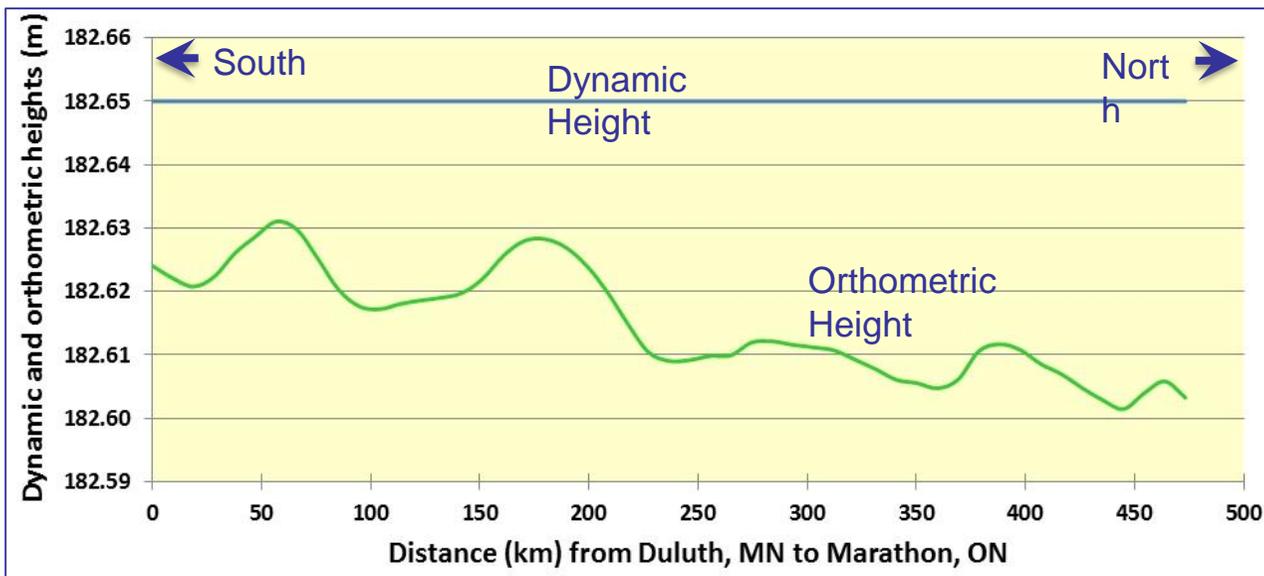
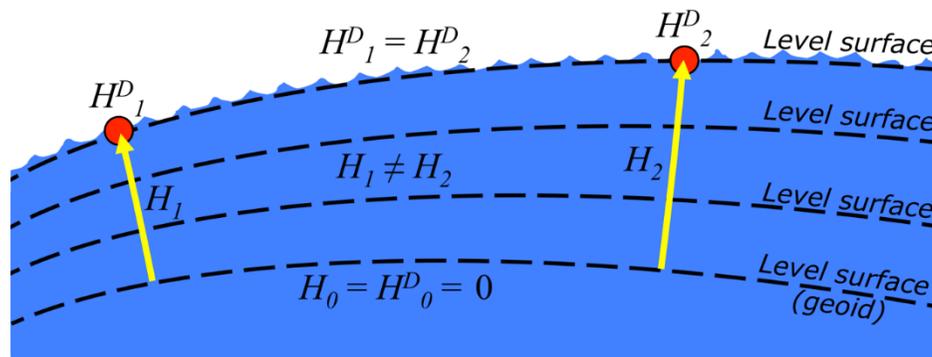
$$H_{\text{力}} - H_{\text{常}} = \frac{\gamma_m - \gamma_f}{\gamma_f} \cdot H_{\text{常}}$$

在平地(200m)差異約 10 cm





正高與力高

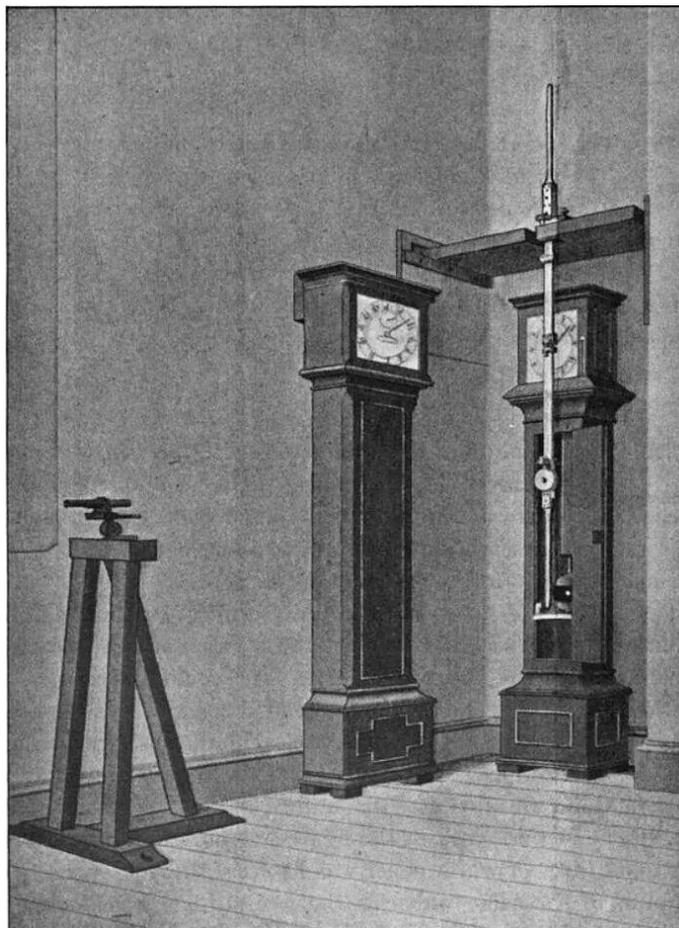




重力測量

可倒擺

伽利略





重力測量作業方式

(一) 絕對重力測定

直接測定待測點之重力值。
以FG5絕對重力儀為例，其以雷射干涉技術，量測雷射光經過一個自由落下的角錐反射體而產生干涉條紋出現的次數，來計算出自由落體之加速度。

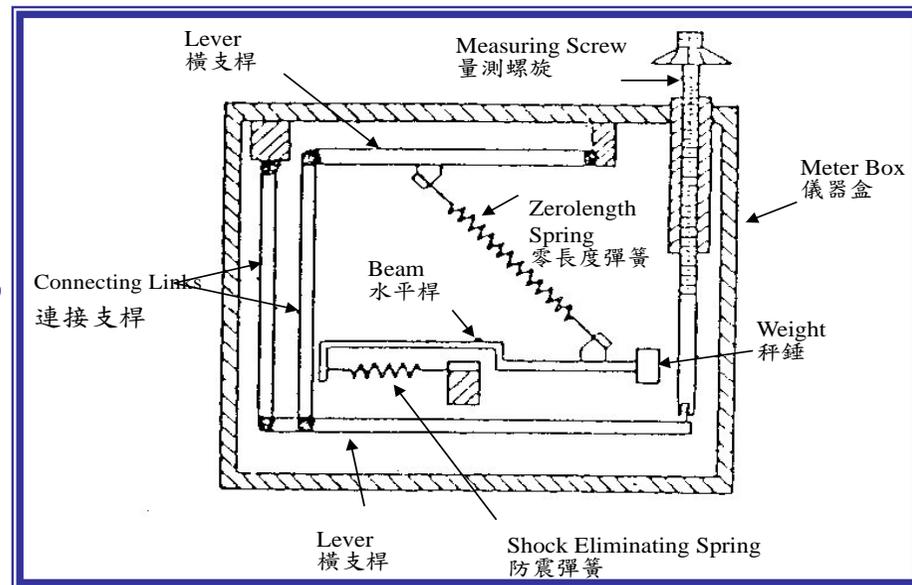




重力測量作業方式

(二) 相對重力測定

測定兩點間重力差。如 LaCoaste & Romberg EG 型相對重力儀，其以一個重物懸掛在一個彈簧秤上，重物所承受的重力與彈簧的彈力方向相反，當兩地重力不同時之平衡位置會改變，測微器就可讀出平衡位置的變化量，也就可算出兩地的重力差。

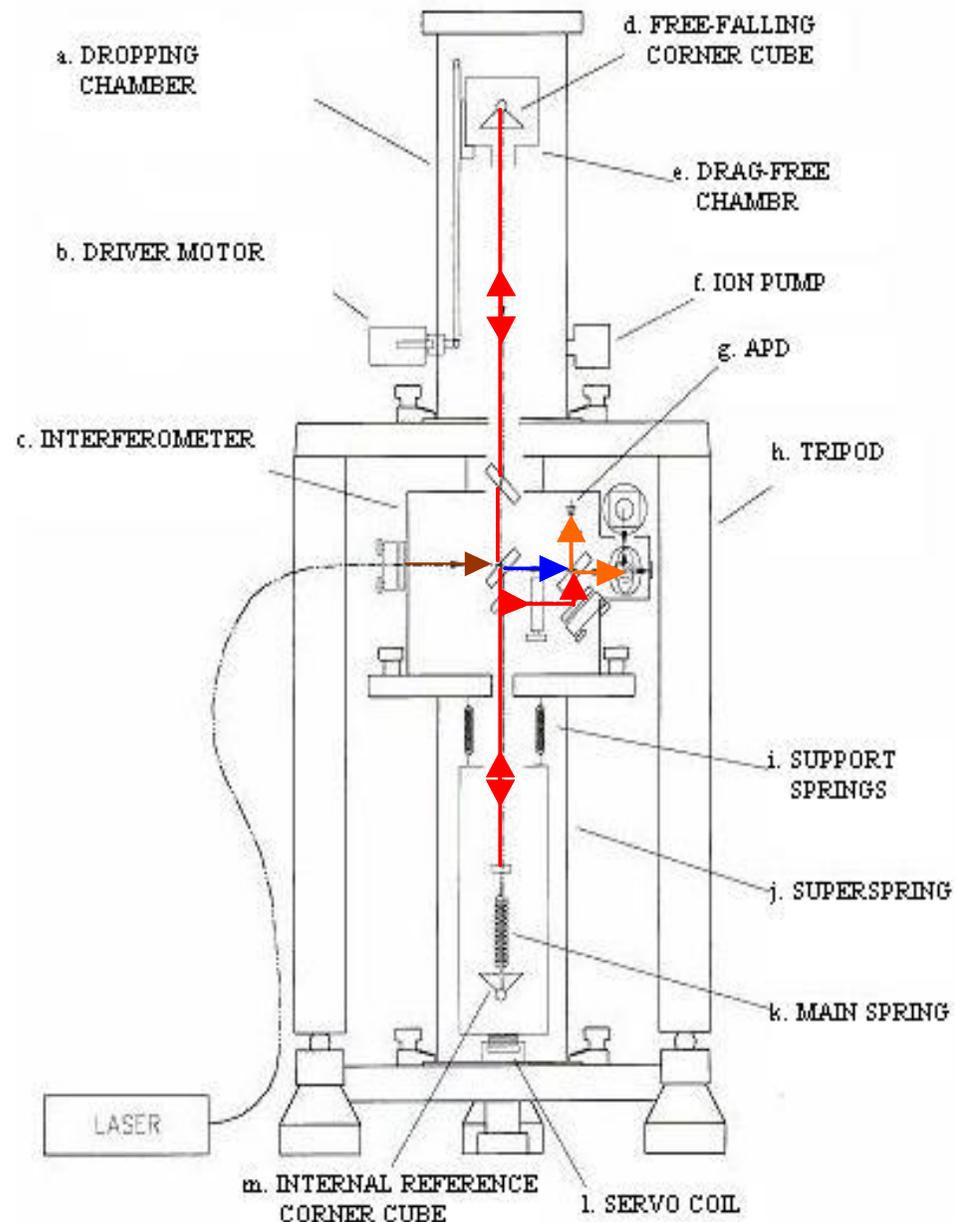




FG5絕對重力儀

- 落體腔(Dropping Chamber)
- 超彈簧(Superspring)
- 雷射干涉儀(Interferometer)
- 雷射(Laser)
- 電子儀器設備(Electronics)
- 軟體(Software)
 - Real-Time Data Acquisition
 - Post-Processing Data Analysis

accuracy: 2 μ gal





環境影響因素

來源	範圍 μGal	改正移除不確定度 μGal	時間尺度
地潮	300	0.2-0.5	每日
海洋負載平衡	20	0.2	每日
海浪	19	5	分鐘
大氣引力負載	8	1-5	小時-每日
地下水位變動	位置相關	位置相關	季節性
極運動	10	<0.01	12.14月
微震	0-20	0	<100 Hz





絕對重力測量的應用

- 建立高精度絕對重力基準
- 校正超導重力儀，建立相對重力儀校正基線
- 測定物理常數 G (計量領域基本參數)
- 監測重力隨時間變化，進行地殼運動、海平面變化、地震預報、地球動力學等研究





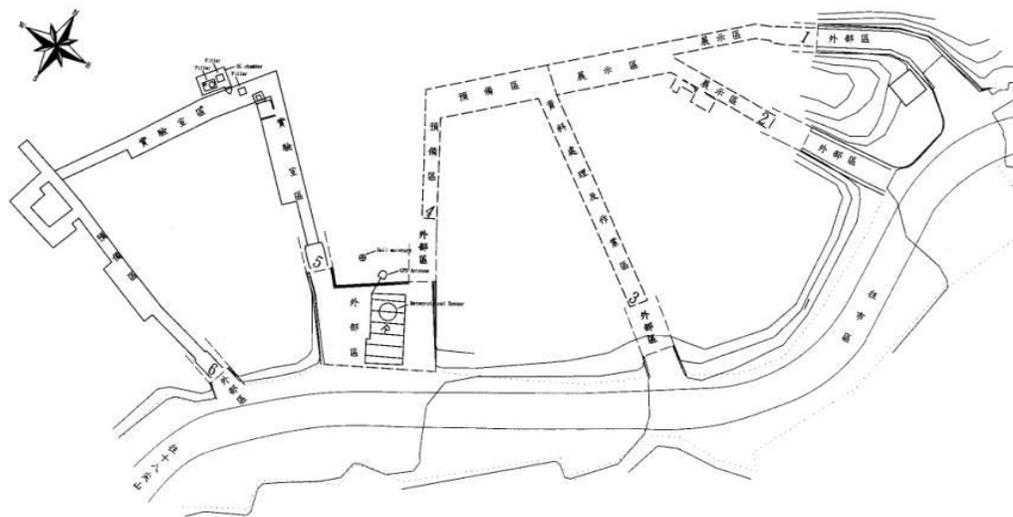
絕對重力點設置考量

- 地質和地震活動上的穩定性
- 地下水變化小，離河道和海岸線幾公里
- 人為造成的微震小
- 永久性建築物最下層的特別房間內，有電源插座
- 安裝儀器地面的傾斜是穩定的，短期的溫度變化小
- 易於被當地有關機構接受和管理
- 可與國家水平、垂直和重力控制網進行聯測
- 可建立地區性的幾何(水平及垂直)控制
- 可建立地區性的重力控制





國家重力點基準站(新竹十八尖山)

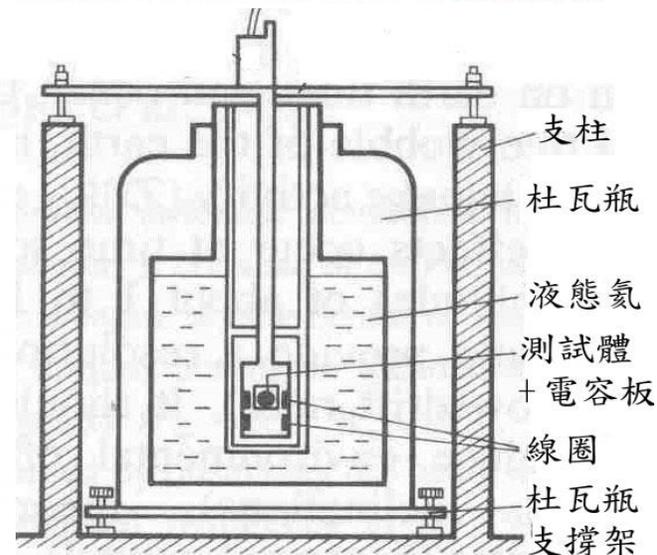
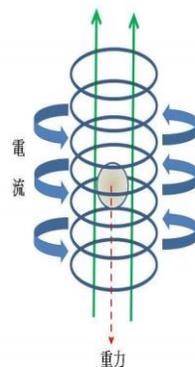




GWR超導重力儀

➤GWR超導重力儀整個重力感測器裝置在杜瓦瓶(特殊溫度絕緣容器)內，利用持續電流運行的超導線圈產生磁場，將測試體鈮(Nb)球處於飄浮狀態。但因重力變化使該球離開初始零位，其垂直位移量由電容感測器量測，並以電子反饋回路補償，將該球不斷地帶回至零位，藉以連續記錄重力微小變化量。

- 解析度： 10^{-11} m/sec²
- 準確度：0.1 μ gal
- 漂移率：1-3 μ gal/year





外業型相對重力測量作業程序

準備儀器裝備



路線規劃找點



重力儀
溫溼度計
氣壓計
校正



繪出點誌記並做成紀錄
存檔備查



實地觀測並記錄
重力數值





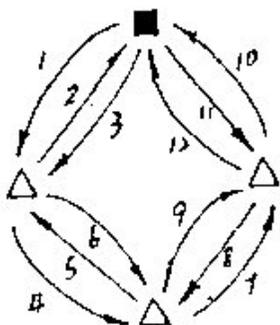
相對重力點的布點原則

- 測區內儘可能均勻分布(特殊地區可例外)
- 在全球及區域基準網內選取特定數量的永久站及監控站(絕對重力測量)
- 考量地區內的地質, 地殼, 動力, 水力的穩定性
- 儀器架設於穩固地區(建地, 固定樁, 岩塊, 水泥地板上)
- 為求加快速度可考量使用現存之水平及垂直控制點
- 建立二至三個觀測輔點以確保測站在基準網內之整體性
- 水平及垂直坐標之測定應在國家坐標系統內
- 與附近之控制點連測





相對重力測量環線作業方式



(1)階段式 (Step)

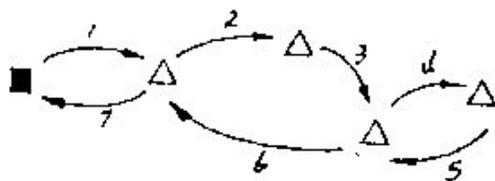


(2)階梯式 (Ladder)

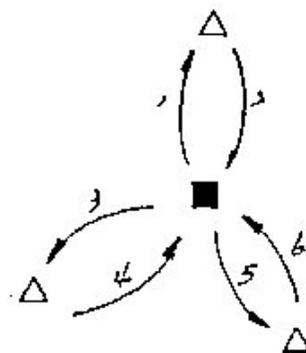
*註：

■ 已知重力站

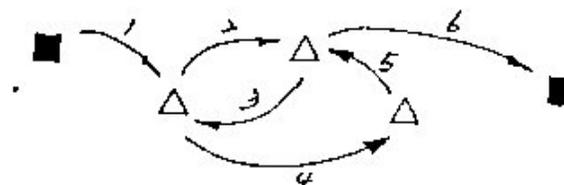
△ 未知重力站



(3)改良式階梯式 (Modified Ladder)



(4)星狀式 (Star)



(5)線狀式 (Line)





重力觀測手簿

重力測量觀測手簿

區域	台灣	測線名稱	大溪~新竹				觀測者	000			記簿者	000			儀器	G838
站名	經度 (°:':")	緯度 (°:':")	高程 (m)	時間			I			II			平均	儀器高		
				0	月	日	時	分	讀數	時	分	讀數	讀數			
DAXI	1211618.7	245236.7	224	91	7	31	08	36	2176.746	08	38	2176.745	2176.745	25.4		
SHIN	1205912.7	244753.4	24	91	7	31	09	45	2210.308	09	47	2210.306	2210.307	23.9		
SHIN	1205912.7	244753.4	24	91	7	31	13	43	2210.302	13	45	2210.300	2210.301	24.3		
DAXI	1211618.7	245236.7	224	91	7	31	14	46	2176.846	14	47	2176.845	2176.846	25.1		





相對重力測量觀測精度

重力點	環線閉合差 (mgal)	精度要求 (mgal)
一等	0.10	0.05
二等	0.20	0.10
三等以下 (含)	0.70	0.30





台灣地區重力現況-1

- 較全面之重力資料是由中油探勘開始才陸續出現
- 中央研究院於1980至1987年進行有系統之全台灣重力測量，主要分布於既有之三角點、水準點
- 聯勤於1986到1988年間及1997到1999年間曾進行兩次規模較大之重力測量計畫
- 中正理工學院與美國大地測量局合作於1991年首次進行絕對重力測量
- 內政部於1999年委託進行台灣地區絕對重力點檢測工作





台灣地區重力現況-2

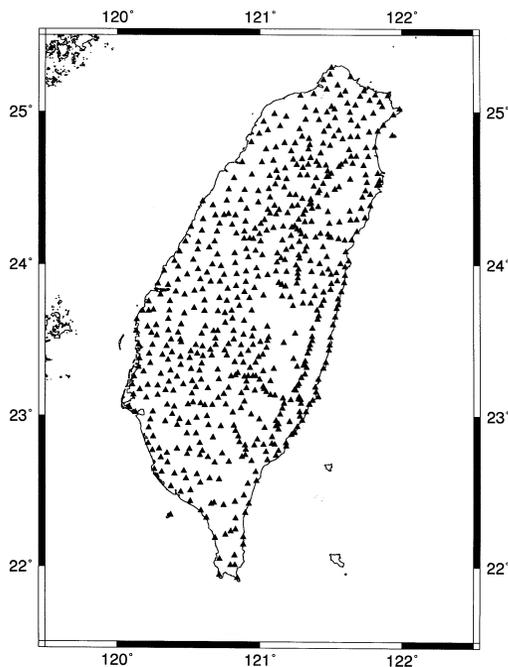
- 內政部於2000-2001年間委託進行一等一級水準點上重力測量計畫
- 內政部於2002-2003年間委託進行一等二級水準點上重力測量計畫
- 內政部於2004年起委託進行空載重力測量計畫
- 內政部於2004年起委託進行船載重力測量計畫
- 內政部於2004-2006年委託建置國家重力基準站及絕對重力國際比對聯測案
- 內政部委託民間公司測設一二等重力網工作案





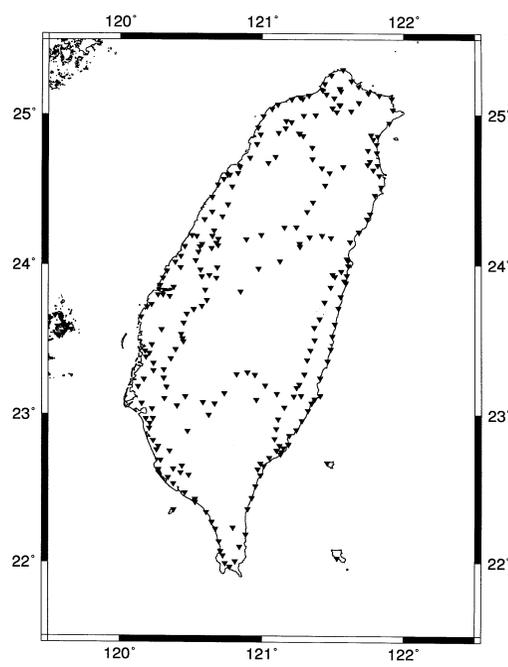
台灣地區各組重力資料

1



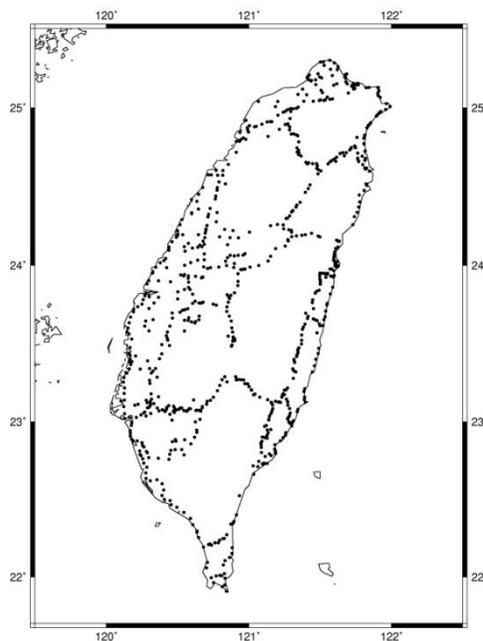
中研院 603個重力觀測點分佈圖

2



聯勤測量隊提供之276個重力觀測點分佈圖

3



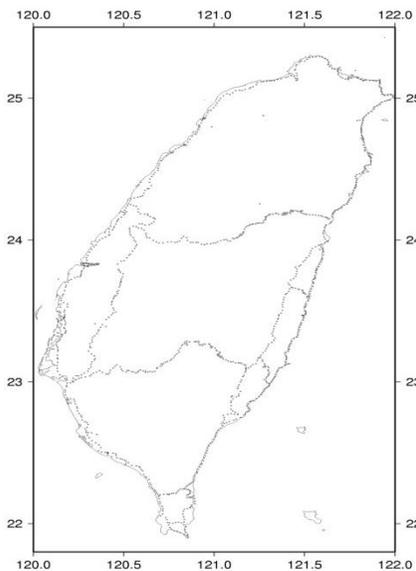
聯勤測量隊提供之747個重力觀測點分佈圖





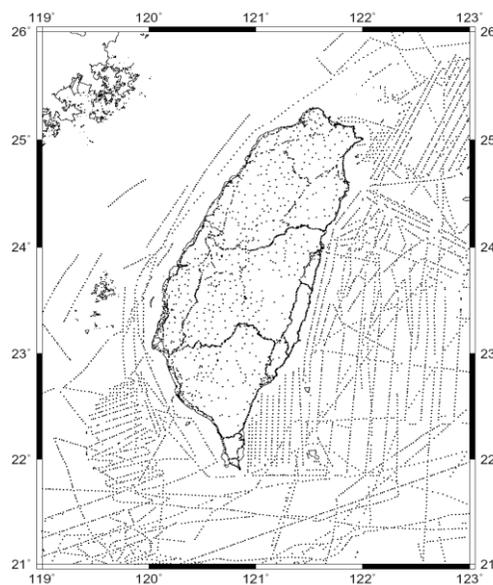
台灣地區各組重力資料

4



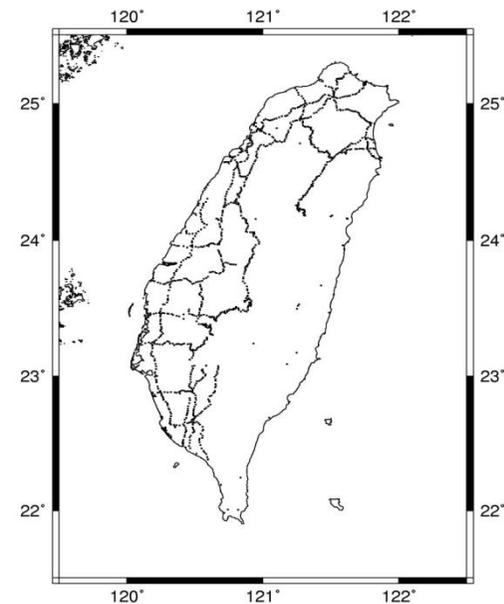
內政部於2001年施測一等一級水準點重力觀測之點位分佈圖

5



外國船測重力點及所有陸上重力點位(第一至第四組資料)分布圖

6



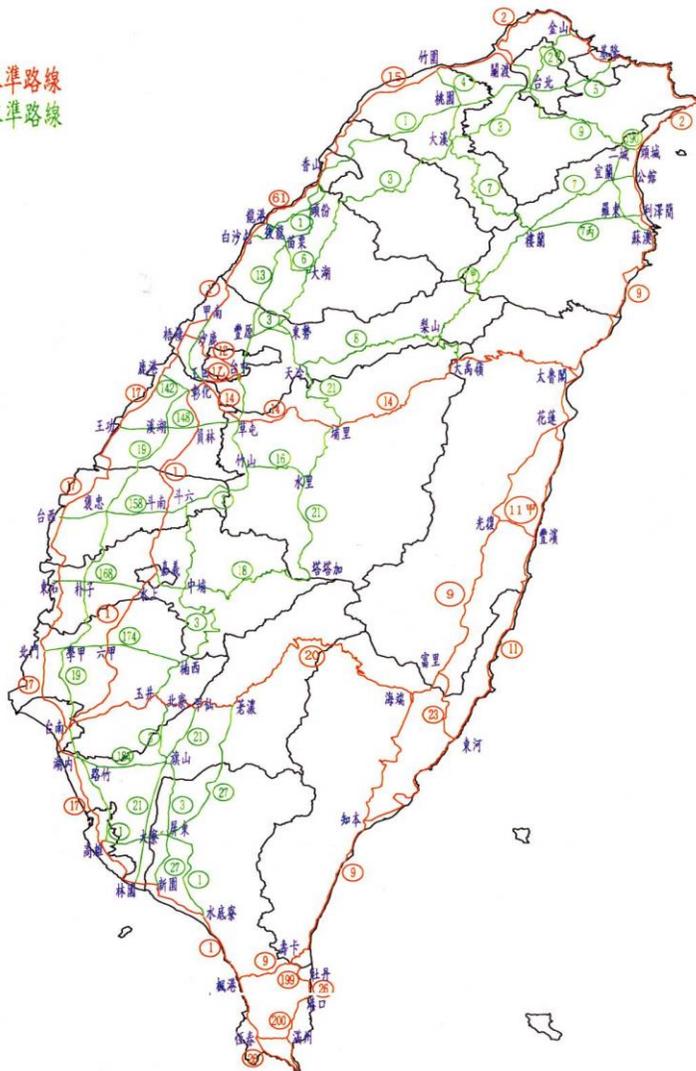
內政部於2002至2003年施測一等二級水準點重力觀測之點位分布圖



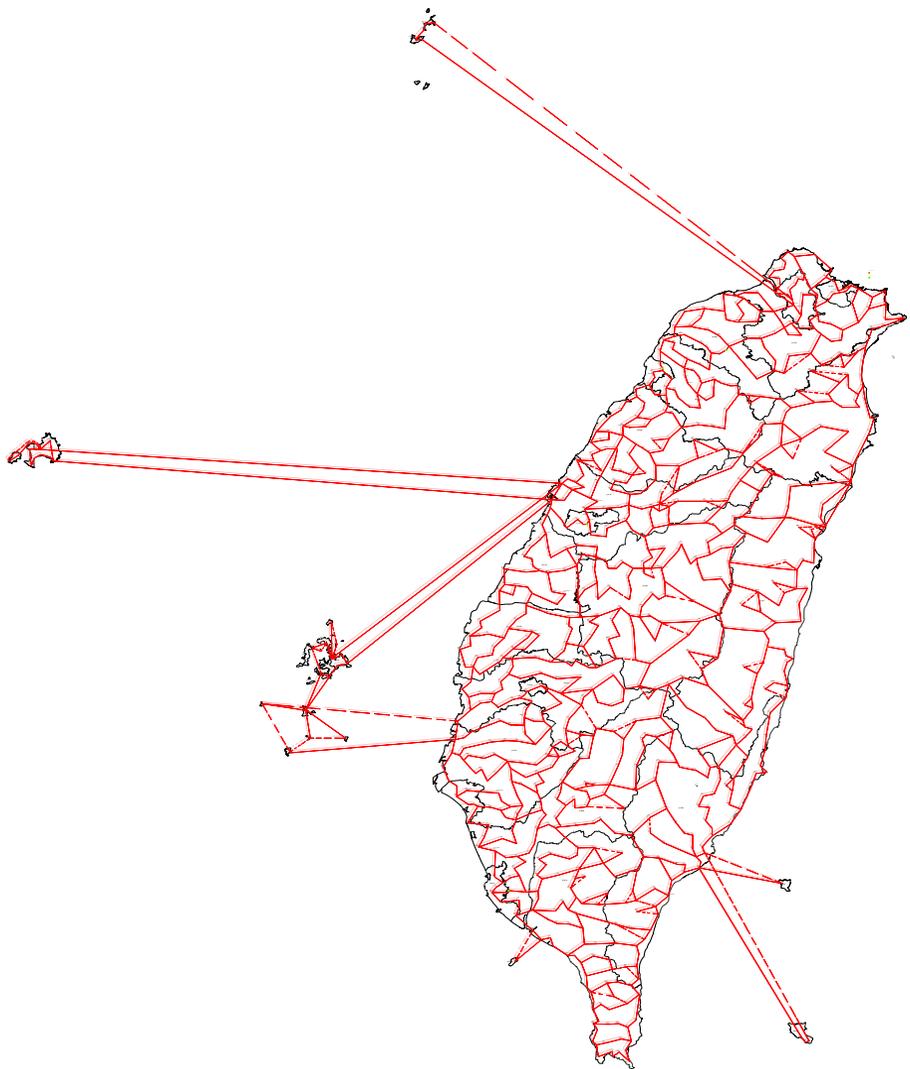


台灣地區水準點重力資料

- 一等一級水準路線
- 一等二級水準路線
- 節點位置

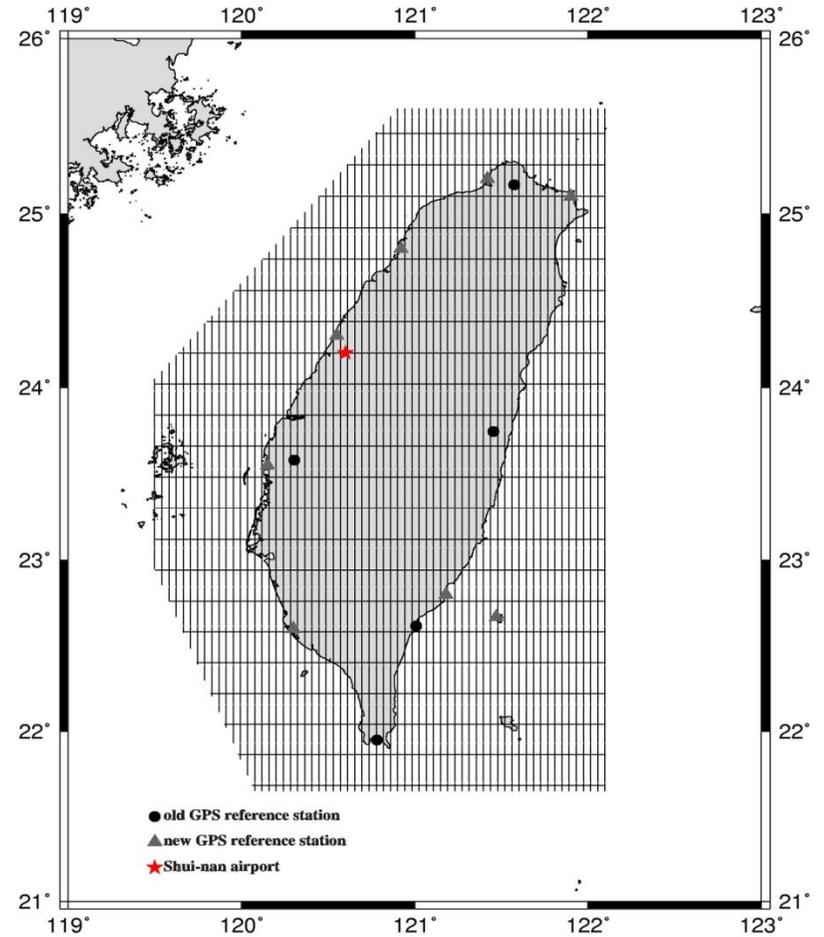


台灣地區一等重力點



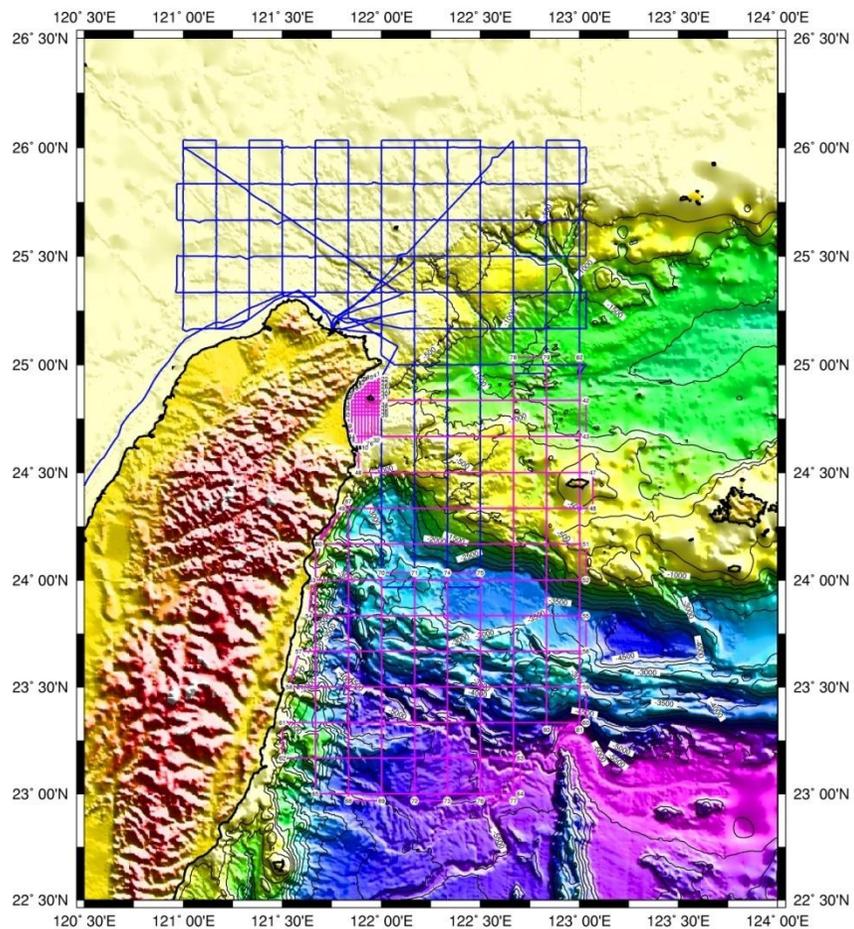


空載重力測量





船載重力測量





空載及船載重力

- 可快速測定或加密特殊地形(如山區或近岸)
- 皆採相對重力測量方式作業
- 與陸地相較之不同點：
 - 在港口或機場設立重力參考點
 - 重力儀型號特殊，且須有平衡穩定裝置
 - 配合GPS進行時間同步，並取得測點坐標
 - 屬動態形式測量，資料改正較多項(如基準改正、離心力改正)
 - 精度採用交叉點檢核方式取得





台灣地區重力基準

- 重力基準：包括新竹重力基準站（HS）及其雙絕對重力點，一為新竹主點（點號：HS01）位於站內，一為新竹副點（點號：HS02）位於鄰近之國家度量衡標準實驗室
- 使用經國際重力比對（如 International Comparison of Absolute Gravimeters, ICAG）驗證之絕對重力儀，進行長期觀測分析，將其測量成果作為訂定重力系統之依據





台灣地區重力系統

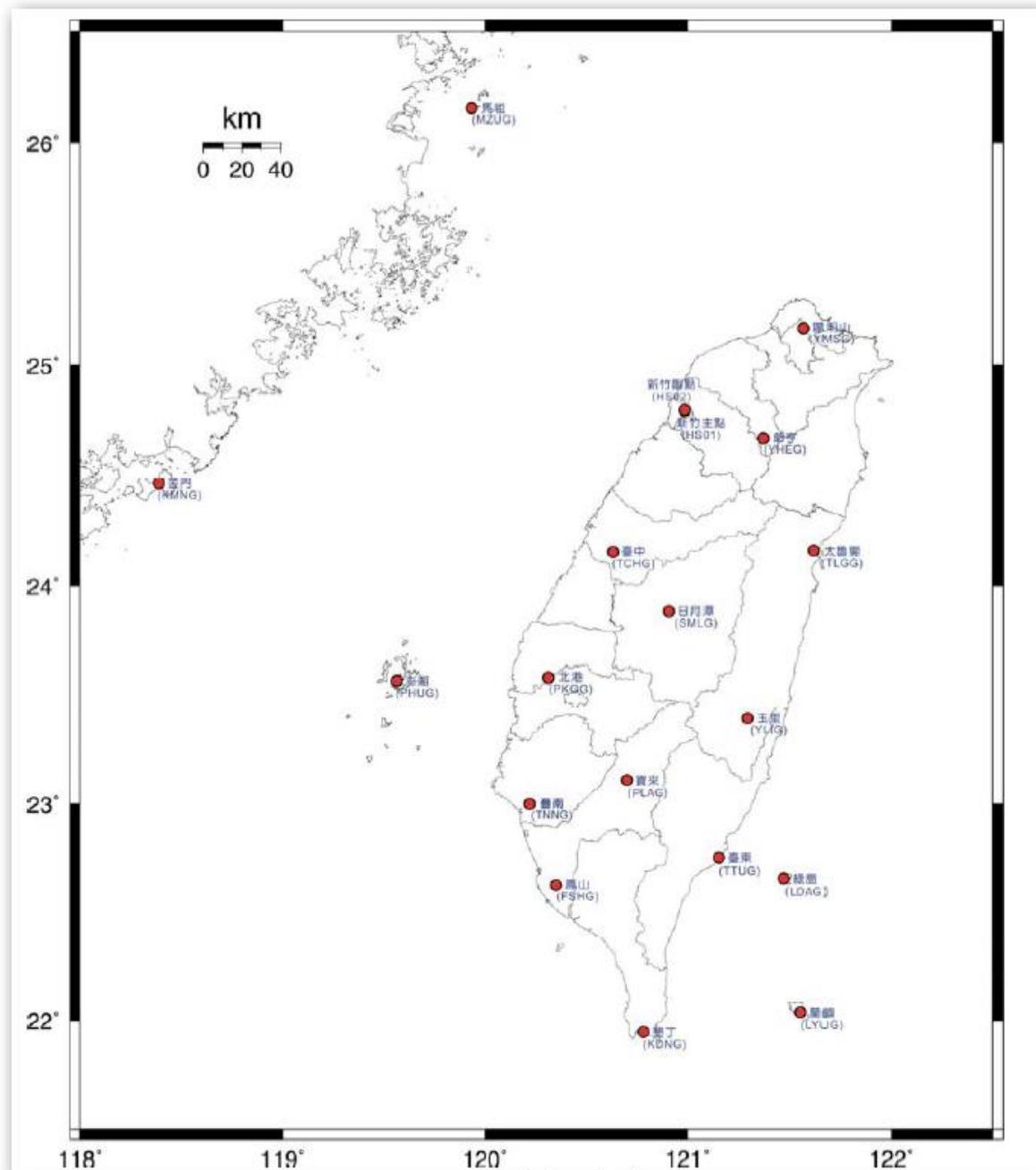
- 內政部於民國 98 年 12 月 25 日公告臺灣地區重力基準及重力系統之成果
- 重力系統：基本控制測量之重力值計算，應依據重力基準之測量成果化算，且視精度需要進行環境改正，並命名為二〇〇九重力系統（Gravity System 2009，簡稱 GS2009）





絕對 重力點

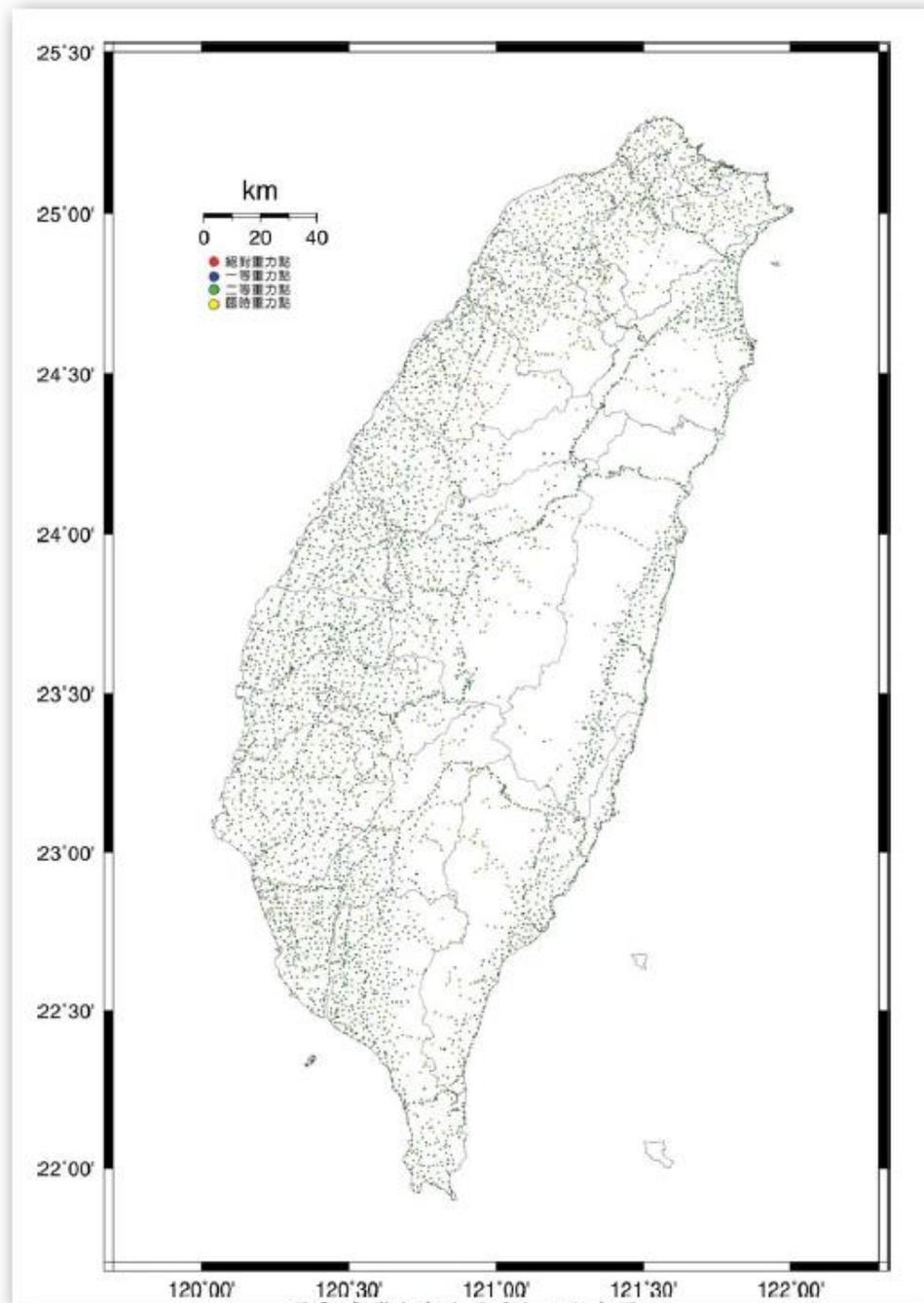
- 17 個絕對重力點
- 中誤差約為 0.003 - 0.007 mGal
- 作為一、二等重力測量成果平差之依據





本島重力點 分布

- 平均2 公里一筆重力資料為原則
- 自93 年至101年計完成6,791 個各級點位之施測
- 一等重力點683 點、二等重力點6,084 點





一、二等重力點種類

- 一等重力測量：施測點位包括內政部絕對重力點正、副點、水準原點正、副點、一等水準重力點、一、二等衛星控制點等
- 二等重力測量：施測點位包括內政部一、二、三等三角點、一等水準點、潮位站水準點、新設二等重力點、內政部國土測繪中心三等衛星控制點及加密控制點、經濟部中央地質調查所地殼變動基準點、臺北市政府都市發展局3D 控制點、交通部民用航空局控制點、臨時重力點等

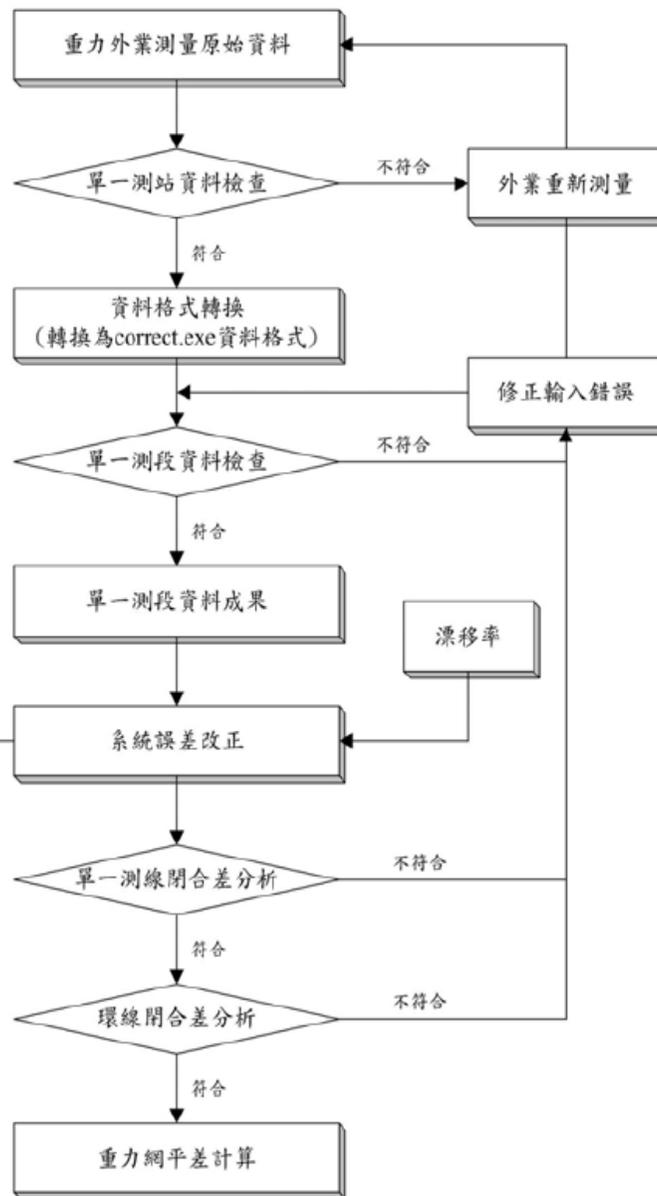




計算流程

- 系統誤差改正：固體潮改正、極移改正、大氣壓力改正、海潮改正、儀器高改正、零點飄移改正

1. 固體潮改正。
2. 極移改正。
3. 大氣壓力改正。
4. 海潮改正。
5. 儀器高改正。
6. 零點漂移改正。





全體重力點分類統計表

等級	臺灣本島	澎湖	金門	馬祖	蘭嶼	綠島	合計
絕對重力點	14	1	1	1	1	1	19
一等重力點	655	14	9	6	3	1	688
二等重力點	5,830	98	79	32	31	14	6,084
小計	6,499	113	89	39	35	16	6,791

項次	點位等級	數量
1	絕對重力點	17
2	一等重力點	683
3	二等重力點	6,084
	合計	6,784

103年3月13日內政部
公告數量





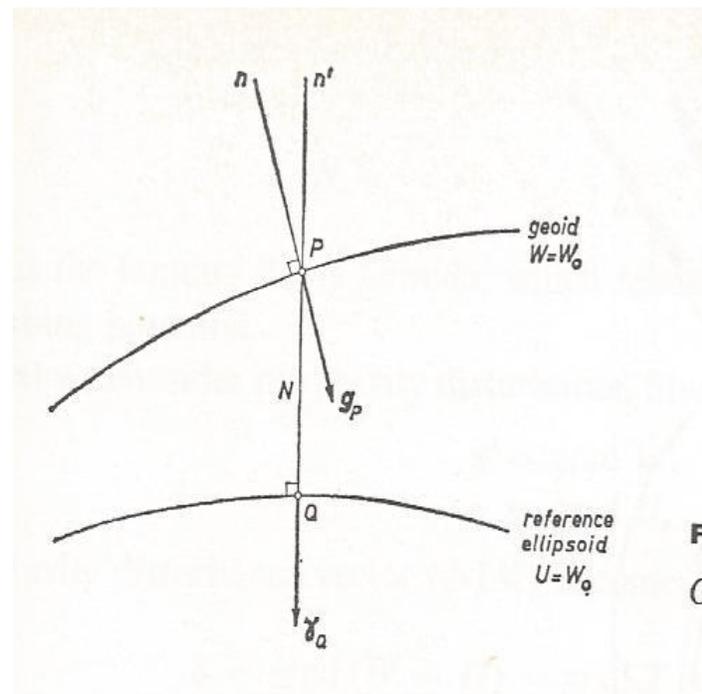
重力異常

- 地表測點之重力值(g)化算至大地水準面(g_p)後，再與橢球面上相應點處之正常重力值(γ_Q)相減之重力差值

$$\Delta g = g_p - \gamma_Q$$

用途：

- 求算大地水準面與橢球面
關連量(大地起伏/垂線偏差)
- 進行重力內(外)插
- 探討地殼結構





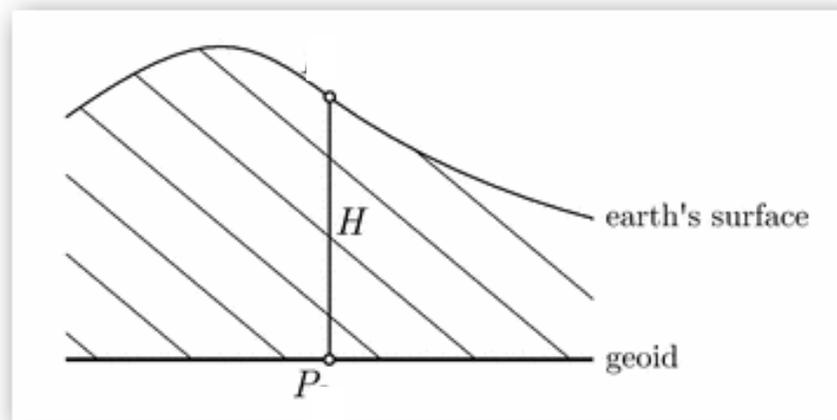
重力化算

- 地表面上重力值考量其受地形質量之影響，將該值施加改正後，可化算至大地水準面上，進而取得其相應重力值之過程

- 常用之重力化算模式：

$$g_p = g - \frac{\partial \gamma}{\partial H}$$

- 自由空間改正
- 布格改正
- 地形改正
- 均衡改正





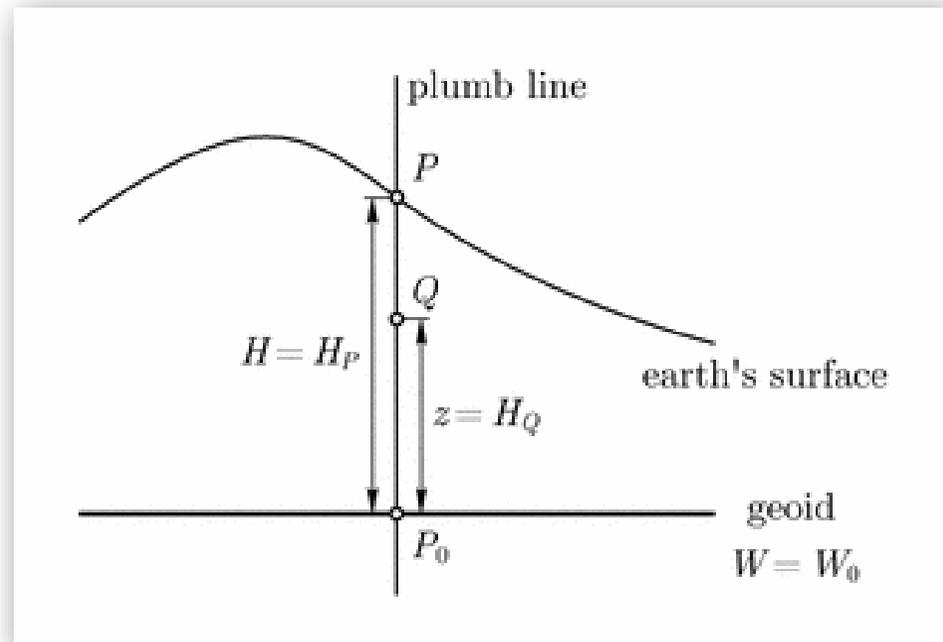
Poincare' and Prey 化算

- 重力沿垂線化算

$$\frac{\partial g}{\partial H} = \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 4\pi G \rho$$

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -0.3086 + 0.2238 = -0.0848$$

$$g_Q = g_P + 0.0848 (H_P - H_Q)$$



- 正高改正使用之平均重力位處在垂線一半處

$$\overline{g}_p = g_p + 0.0424 H_p$$





自由空間改正

- 將地形質量完全移除，僅存在與高程相關之梯度關係

$$-\frac{\partial \gamma}{\partial H} = 0.3086 \text{ mgal/m}$$

- 空間改正式

$$g_p = g + 0.3086 H$$

- 空間重力異常

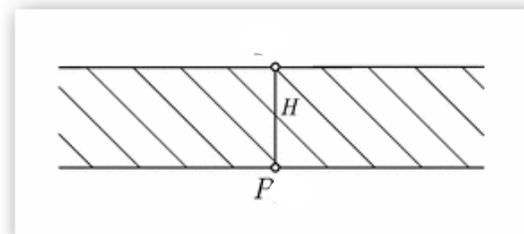
$$\Delta g = g_p - \gamma_Q = g + 0.3086 H - \gamma_Q$$





布格改正

- 地形質量存在(布格平板)



$$g_p = g + 0.3086 H + \delta g_T$$

$$\delta g_T = 2\pi G\rho H = 0.1119 H$$

- 布格改正式

$$g_p = g + 0.3086 H - 0.1119 H = g + 0.1967 H$$

- 布格重力異常

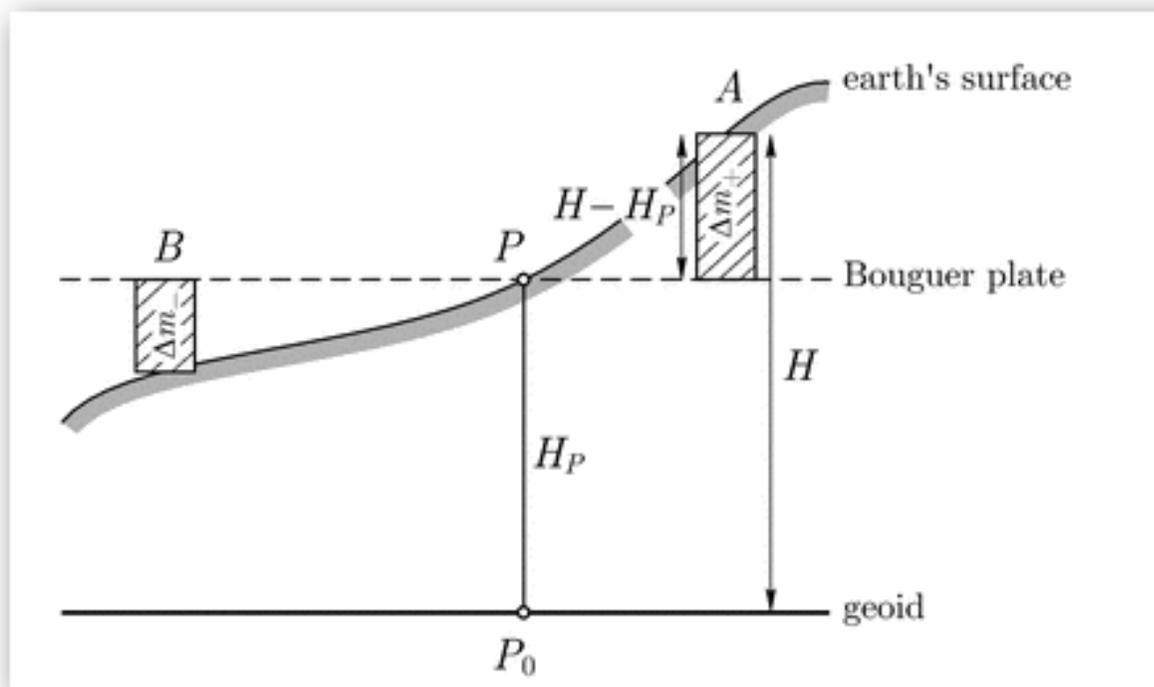
$$\Delta g = g_P - \gamma_Q = g + 0.1967 H - \gamma_Q$$





地形改正

- 山區地形之附加式重力改正項目
- 不論剩餘地形或不足地形的移除，皆會使P點重力增加

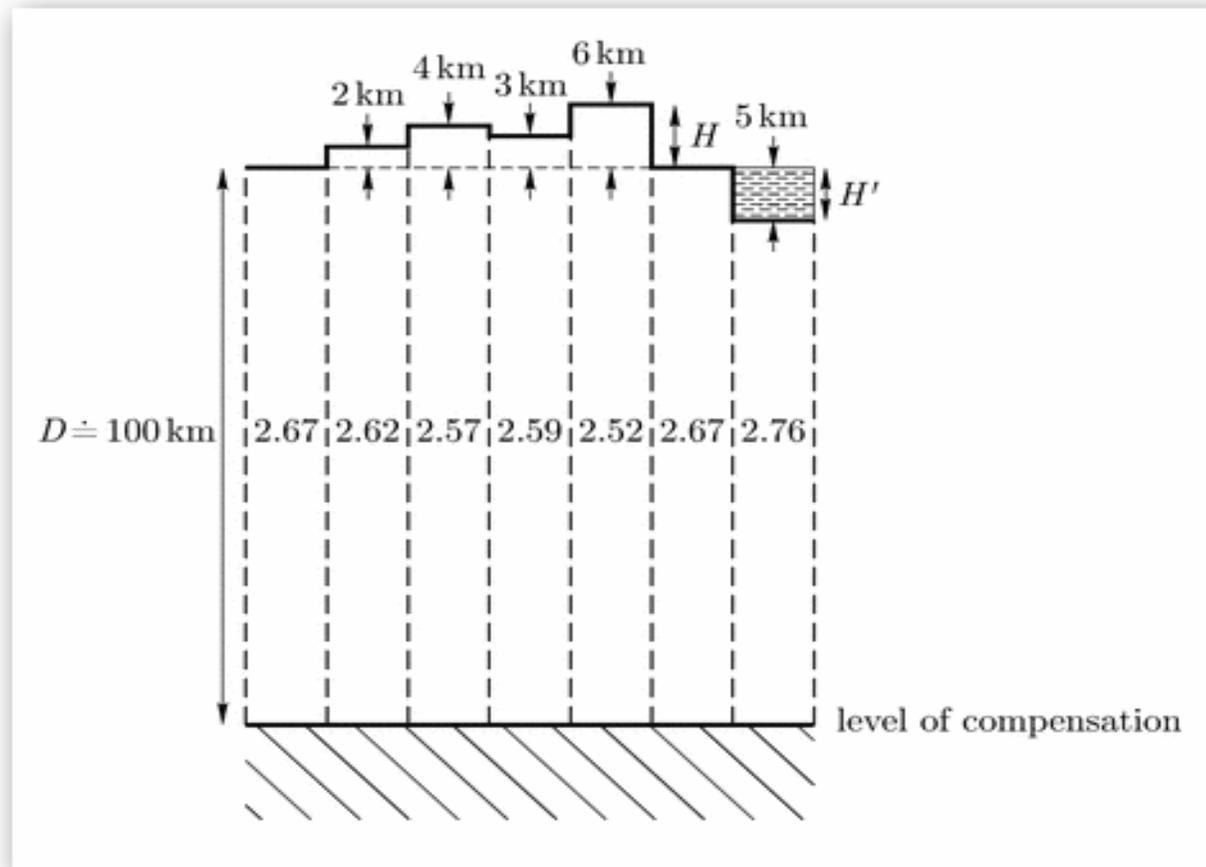




均衡改正

高海拔地區適用

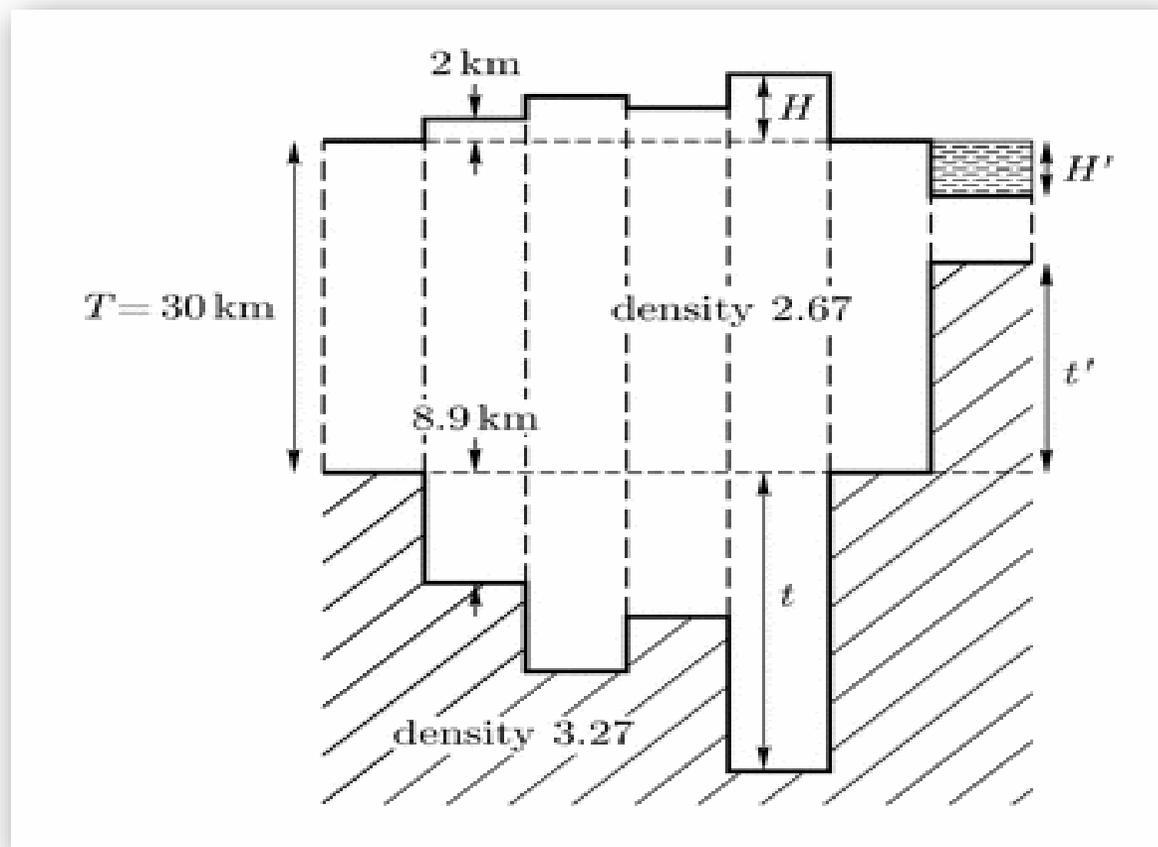
- Pratt-Hayford 模型





均衡改正

- Airy-Heiskanen 模型





基本公式

$$W = U + T$$

$$T = W - U$$

大地起伏

$$N = \frac{T}{G}$$

Bruns 布隆公式

垂線偏差

$$\delta\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial \delta N}{\partial \varphi},$$
$$\delta\eta = -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial \delta N}{\partial \lambda}.$$





重力法大地起伏計算

- Stokes (1849)

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{R}}{4\pi G} \iint \Delta g S(\Psi) d\sigma$$

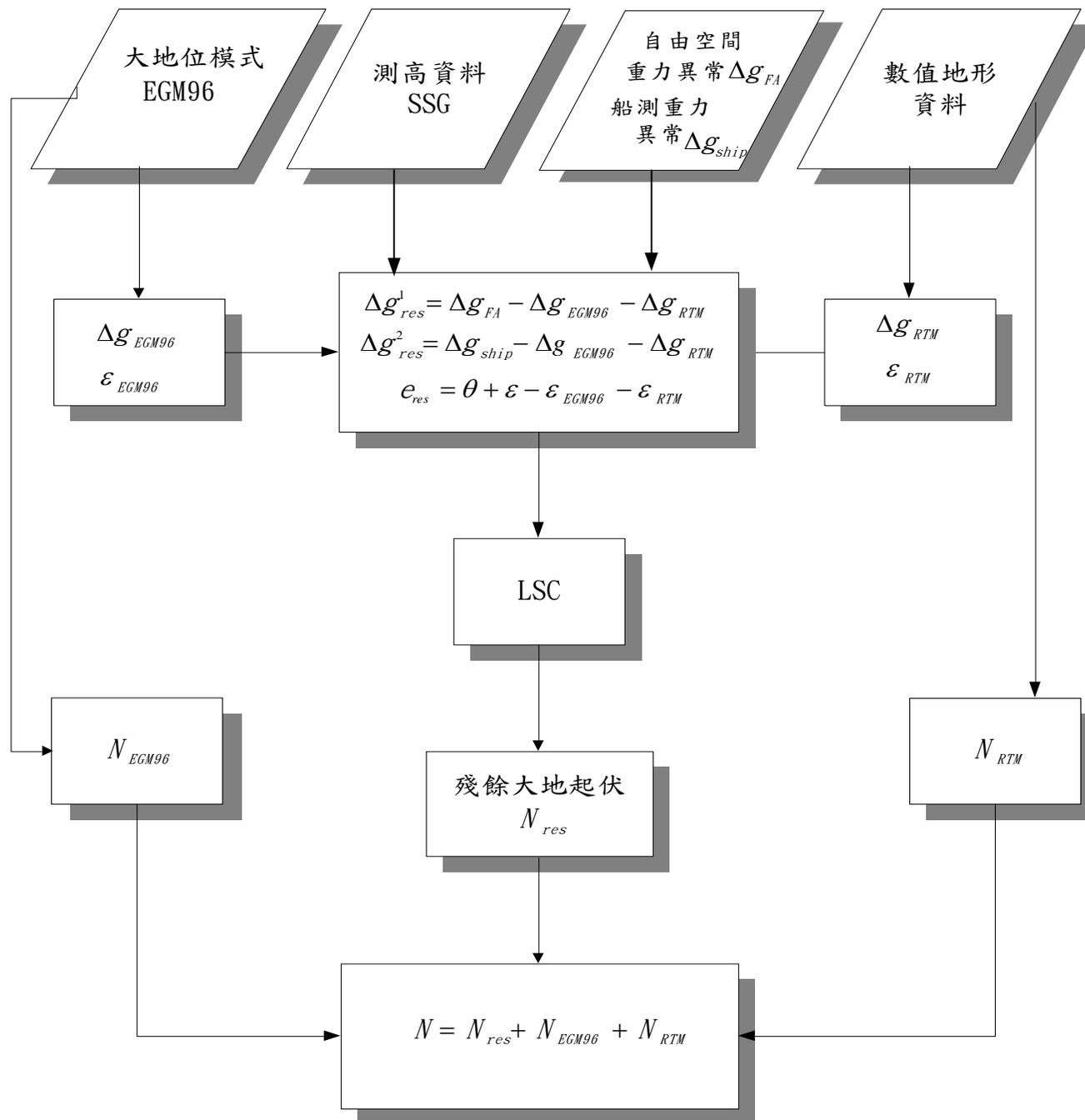
- 附近區域使用實測重力
遠區域使用地球重力位模型





計算流程

remove-restore





重力法垂線偏差計算

- Vening-Meinesz (1928)

$$\xi = \frac{1}{2\pi G} \iint \Delta g V(S) \cos\alpha \, d\varphi \, d\lambda$$

$$\eta = \frac{1}{2\pi G} \iint \Delta g V(S) \sin\alpha \, d\varphi \, d\lambda$$





其他實測資料計算法

- 幾何法

$$N = h_{\text{GPS}} - H_{\text{leveling}}$$

- 天文大地法

$$\xi = \varphi^* - \varphi$$

$$\eta = (\lambda^* - \lambda) \cos \varphi$$

- 引力位模型法

$$\Delta g(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^M \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)$$





衛星測高法

