線性代數

向量

T. C. Kuo

向量

- 介紹：賽車遊戲
- 向量的幾何性質與代數性質
- 長度與角度：點積

  探索
- 直線與平面

  探索

介紹：賽車遊戲

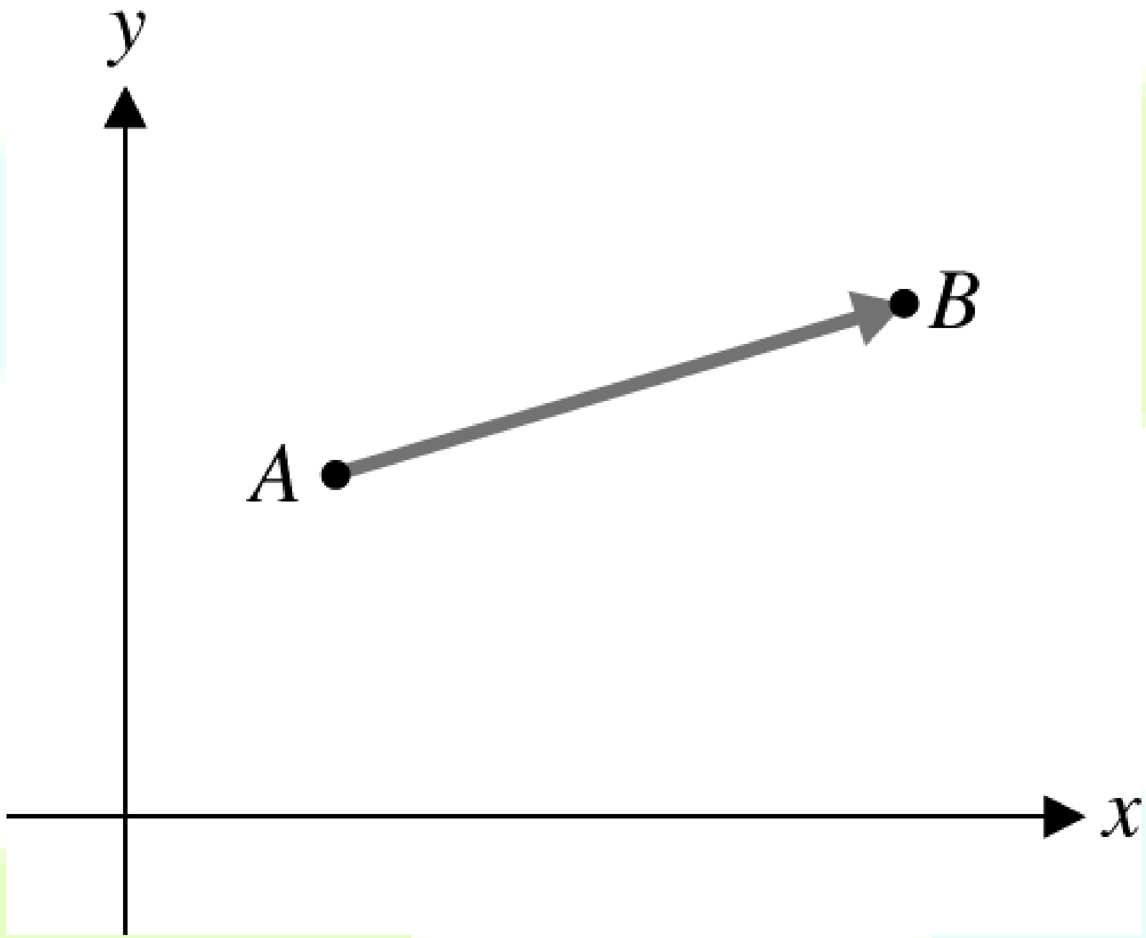
- 許多可測量的量，諸如長度、面積、質量與溫度等，只要設定其度量便能將之完全描述。其他的量，諸如速度、力與加速度等，再描述時則不但需要度量，也需要定向，這「其他的量」便稱為向量(vectors)。
- 幾何上，向量常被表示成箭號或有向的線段。
- 本章介紹向量及其一些幾何與代數性質。我們也將探討再幾何之外的一個重要應用。

向量的幾何性質與代數性質

[平面向量]

- 一個**向量**(vectors)為一個對應到兩點間位移的有向線段，例如圖1.2即顯示一個從點A至點B的位移向量。
- 從A到B的向量被記作 $\overrightarrow{AB}$，其中點A被稱為向量的起點(initial point)或尾(tail)；點B則被稱為向量的終點(terminal point)或頭(head)。通常我們是用一個小寫粗體字母來表示向量，例如向量**v**。

向量的幾何性質與代數性質



向量的幾何性質與代數性質

- 平面上的每一點A皆可對應到一個從原點O出發之向量**a**= $\overrightarrow{OA}$，即一個起點在O，終點在A的向量**a**。[這種形式的向量也被稱作「位置向量」(position vectors)。]
- 我們用中括號來描述向量**a**= $\overrightarrow{OA}$ =[3,2]。向量**a**坐標中的3 與2 被稱作**a** 的分量(components)。
- 一個向量有時也被稱作一個實數的「有序數對」(ordered pair)。因為諸如[3,2] ≠[2,3]。

向量的幾何性質與代數性質

- 「兩個向量相等」的充要條件為「彼此對應的分量相等」。因此，[x,y]=[1,5]可推論得x=1且y=5。
- 為便利起見，我們也常用行向量(column vectors)取代列向量(row vectors)。例如[3, 2] 可被表示成$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$。
- 零向量(zero vector)，被記作**0**。

向量的幾何性質與代數性質

- 所有的二分量向量構成之集合便是實數平面$\boldsymbol{R}^2$(其中$\boldsymbol{R}$即為實數集合)。
- 例如向量[3, 2] 可被解釋如下：從原點O 出發，向右走3 單位，並向上走2 單位，然後到達P點。但其實不管出發點在哪裡，向量位移都可能相同。圖1.4 顯示兩個向量$\overrightarrow{AB}$與$\overrightarrow{CD}$的位移相等。
- 若兩向量長度相等、方向相同，則稱此二向量「相等」(equal)。

例

- 若A＝(-1,2)且B＝(3,4)，找出並將之重畫為一個

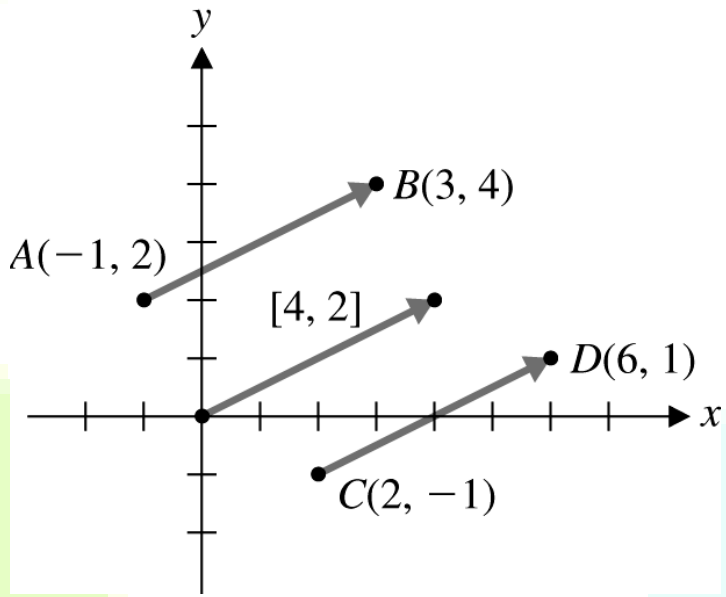
  (a) 位置向量

  (b) 將其起始點改為點C＝(2,-1)

解答

- 解：

我們計算$\overrightarrow{AB}=[3-(-1), 4-2]=[4, 2]$，若$\overrightarrow{AB}$被平移成$\overrightarrow{CD}$，其中C＝(2,-1)，則我們必得到D=(2+4, -1+2)=(6,1)



向量的幾何性質與代數性質

[從舊向量到新向量]

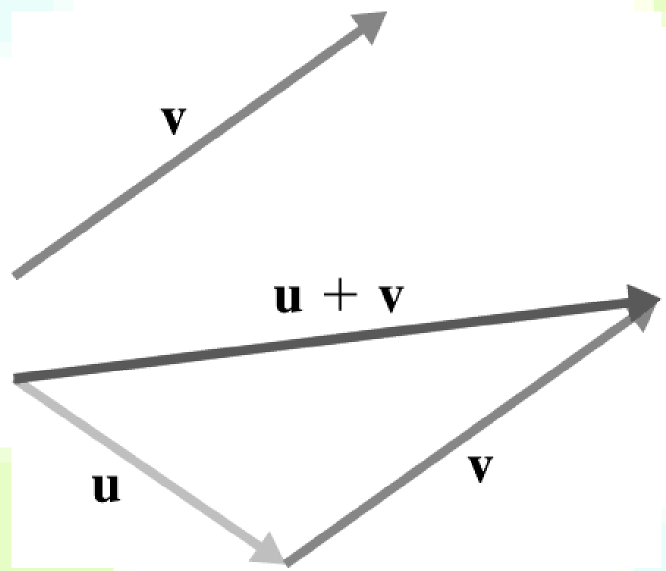
- 向量加法(vector addition)
- 若$\mathbf{u}=[u_1,u_2]$且$\mathbf{v}=[v_1,v_2]$，則其和(sum)便為向量

$$\mathbf{u+v}=[u_1+v_1,u_2+v_2]$$

向量的幾何性質與代數性質

□ 頭尾規則

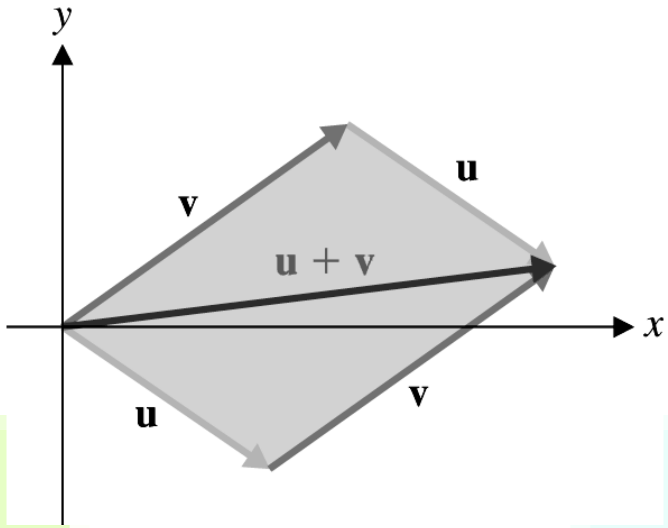
—給定R^2中的向量**u**與**v**，將**v**平移直至其尾部(起始點) 與**u**的頭部(終點) 接合，則**u**與**v**的和**u**＋**v**即為從**u**的尾部到**v**頭部的向量。



向量的幾何性質與代數性質

□ 平行四邊形規則

—給定$\boldsymbol{R}^2$中的位置向量**u**與**v**，則其和**u**＋**v** 即為由**u**與**v**決定的平行四邊形之對角線向量，且也是位置向量。(見圖1.9)



例題

- 若**u**＝[3,-1] 且**v**＝[1,4]，計算並畫出**u**＋**v**。

▶ 解：

計算**u**＋**v**＝[3+1,-1+4]＝[4,3]。此向量可運用頭尾規則畫出如圖1.10(a)，並運用平行四邊形規則畫出如圖1.10(b)。

解答

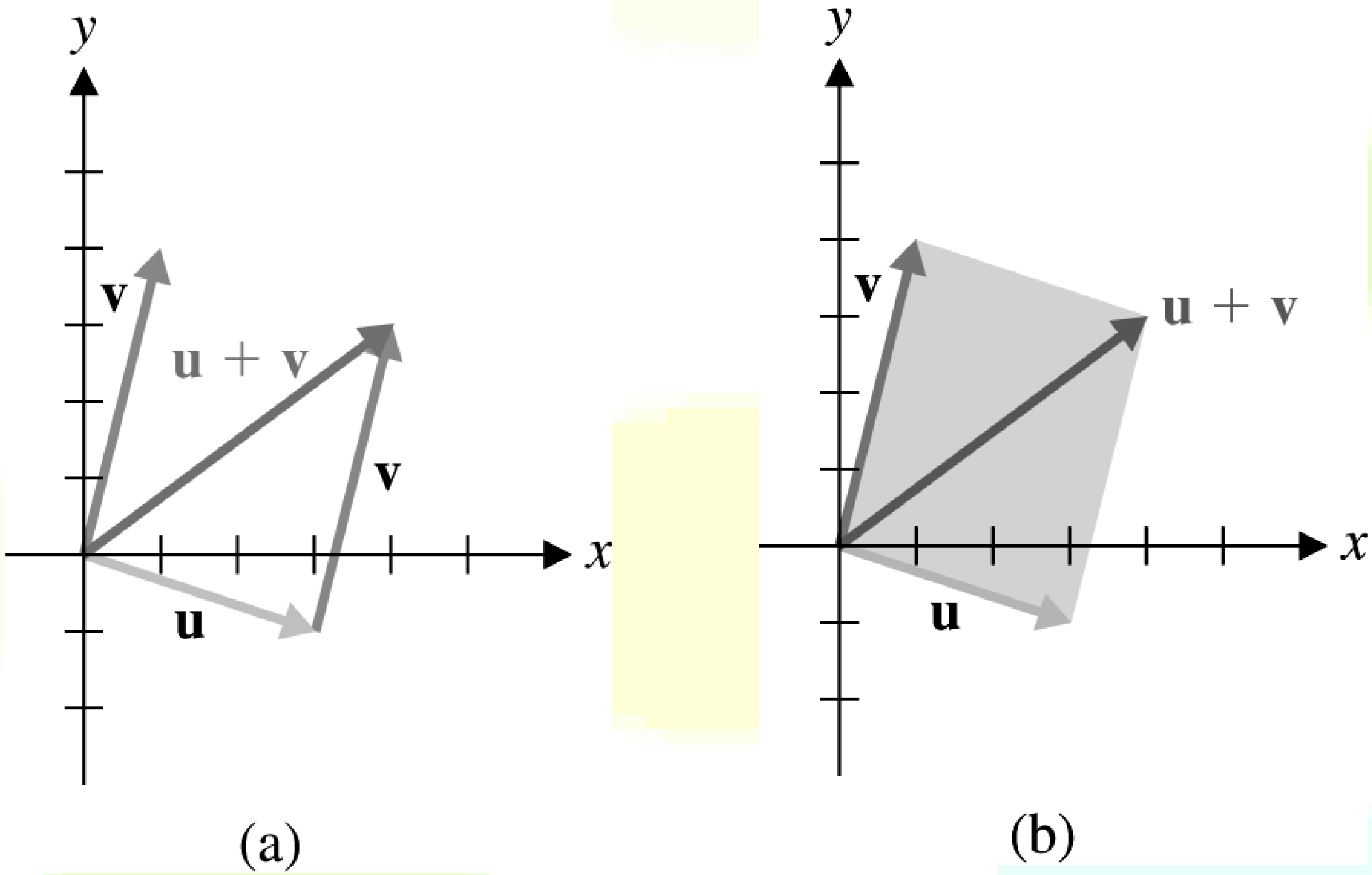


圖 1.10

向量的幾何性質與代數性質

- 第二個基本的向量運算為係數積(scalar multiplication)，或稱為「純量積」。
- 給定一向量**v**與一實數*c*，則係數積*c***v**即為**v**的每一分量都乘上*c*倍的向量。例如3[-2,4]＝[-6,12]，通常

$$cv=c[v_1,v_2]=[cv_1,cv_2]$$

例

- 若**v**＝[-2,4]，計算並畫出2**v**,**v** 與-2**v**。

▶ 解：

我們計算如下

$$
\begin{aligned}
2\mathbf{v} &= [2(-2), 2(4)] = [-4, 8] \\
\tfrac{1}{2}\mathbf{v} &= [\tfrac{1}{2}(-2), \tfrac{1}{2}(4)] = [-1, 2] \\
-2\mathbf{v} &= [-2(-2), -2(4)] = [4, -8]
\end{aligned}
$$

並畫出如圖1.11

解答

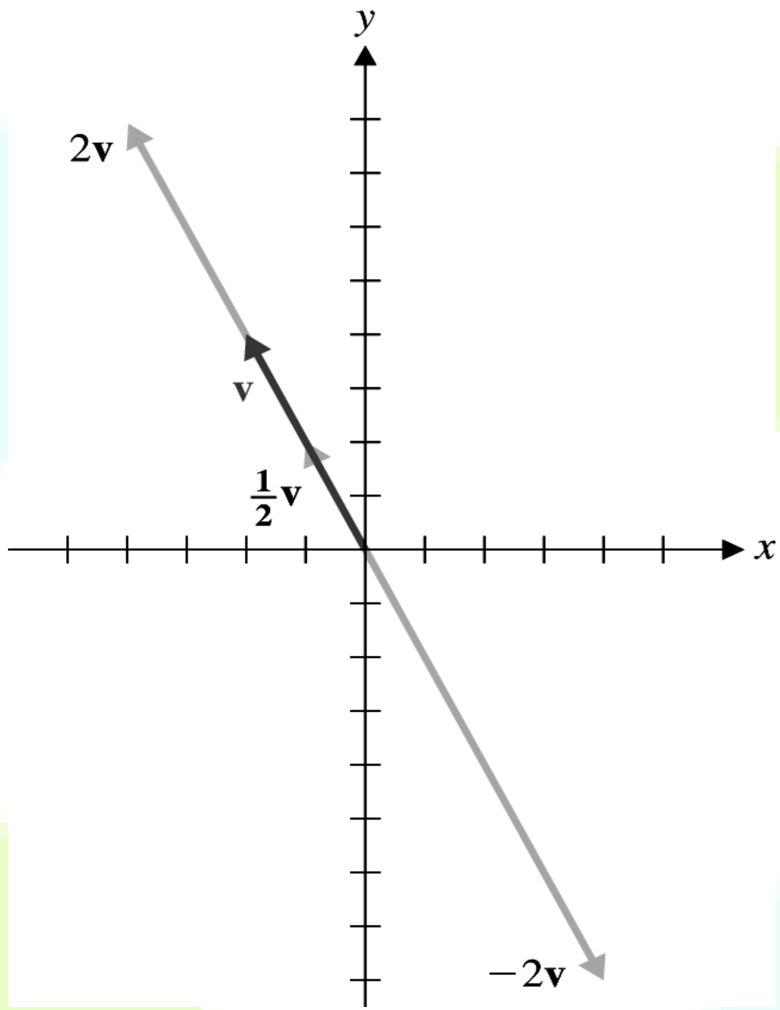
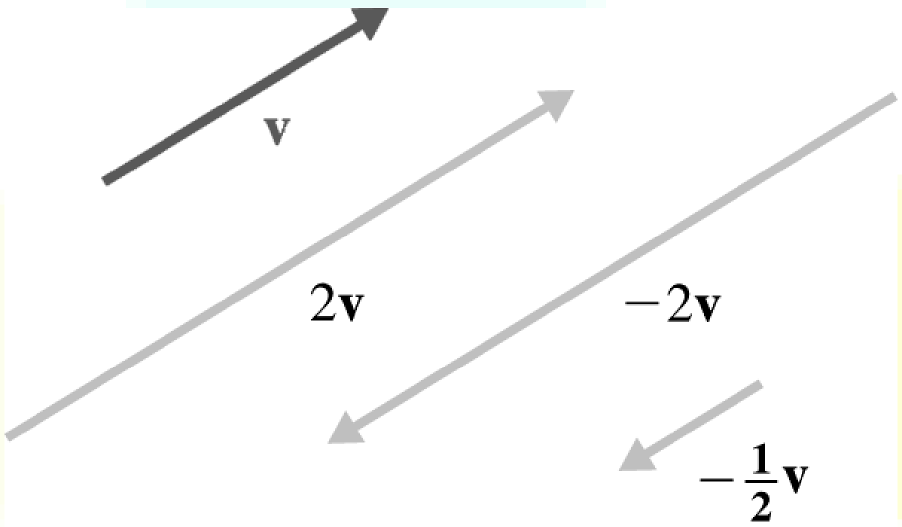


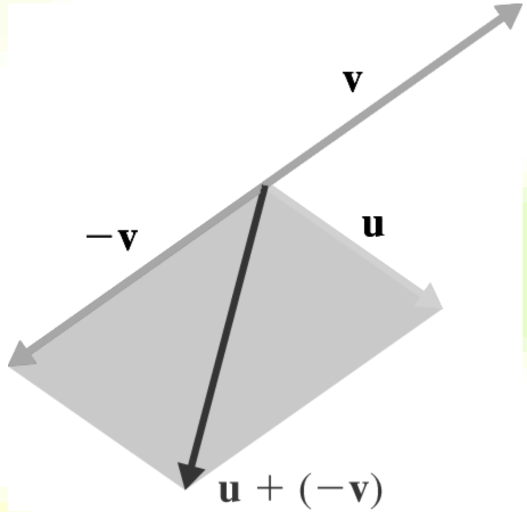
圖 1.11

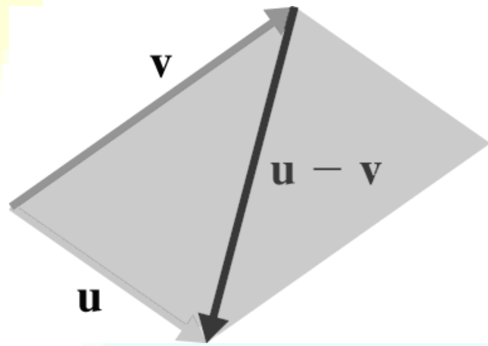
向量的幾何性質與代數性質

- 觀察當*c*>0 時，*c***v**與**v**同方向；*c*<0 時，*c***v**則與**v**反方向。
- 同時*c***v**的長度是**v**長度的｜c｜倍。因為此理由，所以向量章節裡，常數(這裡「常數」指的就是實數) 也被稱作係數(scalars)，或稱為「純量」。
- 如圖1.12 所示，當考慮向量的傳遞，則兩向量互為係數倍數的充要條件是兩向量平行(parallel)。

向量的幾何性質與代數性質







向量的幾何性質與代數性質

- 係數積的一個特例為(-1)v，可寫成-**v**並稱作**v**的負向(negative of **v**)。我們可用其來定義向量減法(vector subtraction)：**u**與**v**的差(difference)即為**u-v**，定義成

$$u-v=u+(-v)$$

向量的幾何性質與代數性質

定理1.1

$\mathbb{R}^n$ 中向量的代數性質

令 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 與 $\mathbf{w}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，且令 c 與 d 為常數，則

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ 交換性
b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ 結合性
c. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
e. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ 分配性
f. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ 分配性
g. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
h. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

向量的幾何性質與代數性質

＊附註＊

- 性質(c) 與(d) 結合性質(a) 可得到**0-u=u**與**-u+u**＝**0**。
- 若我們從右到左觀察性質(e) 與(f)，其顯示我們可從一個總和中分解出一個公因數或共同向量。

例

- 若**a**, **b**與**x**為$\boldsymbol{R}^n$中的向量，

  (a)簡化3**a**+(5**b**-2**a**)+2(**b**-**a**)。

  (b)若5**x**-**a**=2(**a**+2**x**)，將**x**用**a**的形式表達。

- 解：

  我們將詳細說明如何運用定理1.1來解上述兩題。頭幾次作題目時，將所有的步驟都驗證會是很好的練習方法。一旦讀者熟悉了向量性質，以下部分的步驟自然便可省略。

解答

(a)我們由插入括號開始：

$$
\begin{aligned}
3\mathbf{a} + (5\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a}) &= (3\mathbf{a} + (5\mathbf{b} - 2\mathbf{a})) + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\
&= (3\mathbf{a} + (-2\mathbf{a} + 5\mathbf{b})) + (2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) && \text{(a), (e)} \\
&= ((3\mathbf{a} + (-2\mathbf{a})) + 5\mathbf{b}) + (2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) && \text{(b)} \\
&= ((3 + (-2))\mathbf{a} + 5\mathbf{b}) + (2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) && \text{(f)} \\
&= (1\mathbf{a} + 5\mathbf{b}) + (2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) \\
&= ((\mathbf{a} + 5\mathbf{b}) + 2\mathbf{b}) - 2\mathbf{a} && \text{(b), (h)} \\
&= (\mathbf{a} + (5\mathbf{b} + 2\mathbf{b})) - 2\mathbf{a} && \text{(b)} \\
&= (\mathbf{a} + (5 + 2)\mathbf{b}) - 2\mathbf{a} && \text{(f)} \\
&= (7\mathbf{b} + \mathbf{a}) - 2\mathbf{a} && \text{(a)} \\
&= 7\mathbf{b} + (\mathbf{a} - 2\mathbf{a}) && \text{(b)} \\
&= 7\mathbf{b} + (1 - 2)\mathbf{a} && \text{(f), (h)} \\
&= 7\mathbf{b} + (-1)\mathbf{a} \\
&= 7\mathbf{b} - \mathbf{a}
\end{aligned}
$$

解答

- 由上述，讀者應可瞭解為何我們後面會贊成計算時省略其中部分步驟，事實上，上述計算可被簡化成以下計算：

$$\begin{aligned} 3a + (5b - 2a) + 2(b - a) &= 3a + 5b - 2a + 2b - 2a \\ &= (3a - 2a - 2a) + (5b + 2b) \\ &= -a + 7b \end{aligned}$$

或將大部分的計算步驟用心算方式計算也可。

解答

(b)詳細的計算如下：

$$
\begin{array}{rcll}
5x - a &=& 2(a + 2x) & \\
5x - a &=& 2a + 2(2x) & \text{(e)} \\
5x - a &=& 2a + (2 \cdot 2)x & \text{(g)} \\
5x - a &=& 2a + 4x & \\
(5x - a) - 4x &=& (2a + 4x) - 4x & \\
(-a + 5x) - 4x &=& 2a + (4x - 4x) & \text{(a), (b)} \\
-a + (5x - 4x) &=& 2a + 0 & \text{(b), (d)} \\
-a + (5 - 4)x &=& 2a & \text{(f), (c)} \\
-a + (1)x &=& 2a & \\
a + (-a + x) &=& a + 2a & \text{(h)} \\
(a + (-a)) + x &=& (1 + 2)a & \text{(b), (f)} \\
0 + x &=& 3a & \text{(d)}
\end{array}
$$

同樣，其中大部分步驟在一般計算中可被省略。

向量的幾何性質與代數性質

[線性組合與坐標]

定義 若存在係數 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 與向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$，使得一個向量 $\mathbf{v}$ 可表示成 $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$，則稱向量 $\mathbf{v}$ 為向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的一個線性組合 (linear combination)，而 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 則稱為該線性組合的係數 (coefficients)。

例1.6

- 向量$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$為向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$與$\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$的一個線性組合，因為$3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

例

- 令 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ 且 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，我們可運用**u**與**v**來制訂新的坐標組(如同用 $\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 與制訂標準坐標組一樣)，以使我們容易標示出**u**與**v**之線性組合的位置。如圖1.19 所示，**w**可被標示成從原點出發的**-u**再加上2**v**，即

$$w=-u+2v$$

例

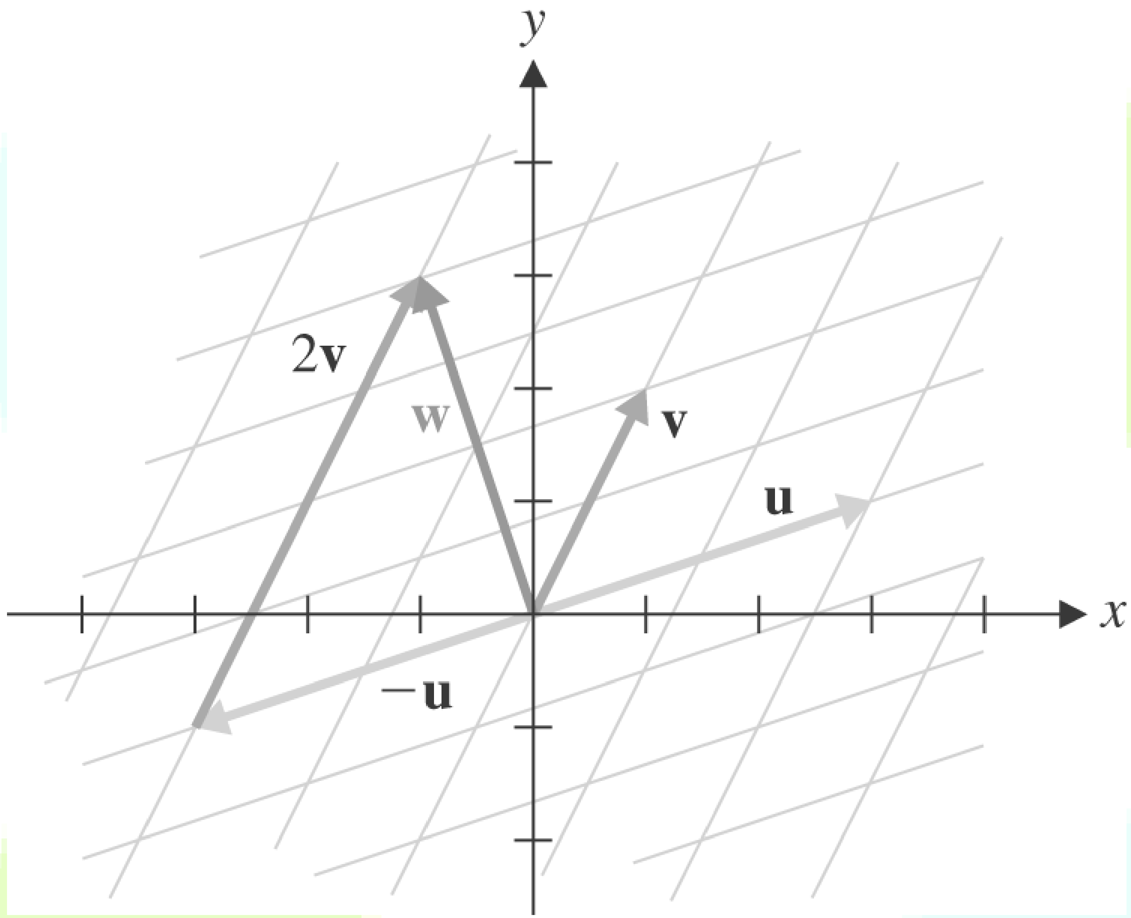


圖 1.19

例

- 我們可說**w**對應到**u**與**v**的坐標為-1與2 (注意，此僅是找出線性組合係數的一種方式)，也就是說

$$\boxed{\mathbf{w} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

(觀察：**w** 對應到$\mathbf{e}_1$與$\mathbf{e}_2$的坐標則為-1與3。)

長度與角度：點積

[點積]

定義　若

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad 且 \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

則向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 的點積 (dot product) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 被定義為

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

長度與角度：點積

- 有幾點是我們必須注意的：首先，u與v必須有相同個數的分量；第二，內積u·v 為一個數(係數)，而非一個向量。
- $\boldsymbol{R}^n$中向量的點積為廣義的內積(inner product) 概念之一個特殊而重要的例子，關於內積我們將在第七章探討。

例

- 令 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$，計算u・v。

- 解 $u \bullet v=1 \bullet (-3)+2 \bullet 5+(-3) \bullet 2=1$

注意，除了計算例1.8的**u・v**，我們也想計算

$v \bullet u=(-3) \bullet 1+5 \bullet 2+2 \bullet (-3)=1$

因此**u・v**＝**v・u**

長度與角度：點積

定理1.2

令 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 與 $\mathbf{w}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，且令 c 為一常數，則

a. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ 交換性

b. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$ 分配性

c. $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$

d. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geq 0$ 且 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

長度與角度：點積

證明

- 我們只證明(a) 與(c)，其餘性質的證明則留待習題。

(a)運用點積的定義計算**u**・**v**與**v**・**u**，我們得到

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n\\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n\\ &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\end{aligned}}$$

其中，中間的等號來自實數乘法的可交換性。

長度與角度：點積

(c)運用點積與係數乘法的的定義，我們得到

$$
\begin{aligned}
(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= [cu_1, cu_2, \ldots, cu_n] \cdot [v_1, v_2, \ldots, v_n] \\
&= cu_1v_1 + cu_2v_2 + \cdots + cu_nv_n \\
&= c(u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n) \\
&= c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})
\end{aligned}
$$

長度與角度：點積

＊附註＊

- 性質(b) 可從右至左來觀察，其意義是說我們可從一個點積的和中提出一個共同的向量**u**。此性質也可結合性質(a) 而將性質(b) 改寫為

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\bullet\mathbf{u}=\mathbf{v}\bullet\mathbf{u}+\mathbf{w}\bullet\mathbf{u}。$$

- 性質(c) 可被推廣成$\mathbf{u}\bullet(c\mathbf{v})=c(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})$(習題44)。(c) 的此種推廣形式基本上可解釋成一個向量係數乘法的點積即等同向量點積的係數乘法，意即為方便計算起見，向量點積的係數乘法中之係數可選擇先與點積中之任一個向量合併計算

長度與角度：點積

- 例如

$$\left(\tfrac{1}{2}[-1,-3,2]\right)\cdot[6,-4,0]=[-1,-3,2]\cdot\left(\tfrac{1}{2}[6,-4,0]\right)=[-1,-3,2]\cdot[3,-2,0]=3$$

- (d)的第二部分運用邏輯連接詞「若且唯若」(if and only if)。附錄A對此語詞有更細緻的討論，但現在我們先只簡單將之解釋為「雙重蘊涵」(a double implication)，字面上來說即

  若u=0，則u • u=0

  與

  若u • u=0 ，則u=0

例

- 對R^n中所有向量**u** 與**v**，證明：

$$(u+v)\bullet(u+v)=u\bullet u+2(u\bullet v)+v\bullet v$$

- 解：

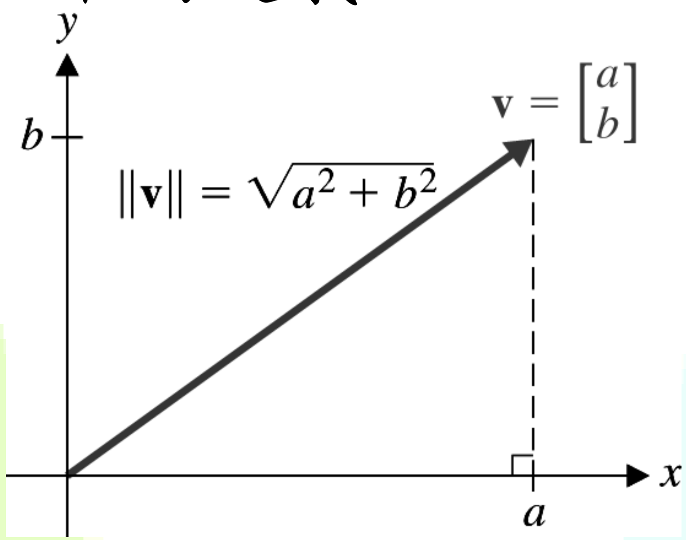
$$(u+v)\bullet(u+v)=(u+v)\bullet u+(u+v)\bullet v$$
$$=u\bullet u+v\bullet u+u\bullet v+v\bullet v$$
$$=u\bullet u+u\bullet v+u\bullet v+v\bullet v$$
$$=u\bullet u+2(u\bullet v)+v\bullet v$$

(確定定理1.2的部分被運用在每一步驟。)

長度與角度：點積

[長度]

- 在$\boldsymbol{R}^2$中，向量 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$的長度為點$(a,b)$到原點的距離，由畢氏定理，即 $\sqrt{a^2+b^2}$，如圖1.22 觀察，我們得到以下的定義。



長度與角度：點積

定義　$\mathbb{R}^n$ 中一個向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ 的長度 (length; norm) 為一個定義如下的非負係數 $\|\mathbf{v}\|$：

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

- 字面上來說，一個向量的長度為其分量平方和的平方根。

例

- $\|[2, 3]\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

長度與角度：點積

定理1.3

令 $\mathbf{v}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的一個向量，且令 c 為一個係數，則

a. $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

b. $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$

例

- 在$\boldsymbol{R}^2$中，令$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$和$\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，則$\mathbf{e}_1$與$\mathbf{e}_2$為單位向量，因為其分量的平方和皆為1。同樣地，在$\boldsymbol{R}^3$中，我們可建造出單位向量

$$\boxed{\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad 與\quad \mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}$$

觀察圖1.25，這些向量被用來定出在$\boldsymbol{R}^2$與$\boldsymbol{R}^3$的正向坐標軸。

例

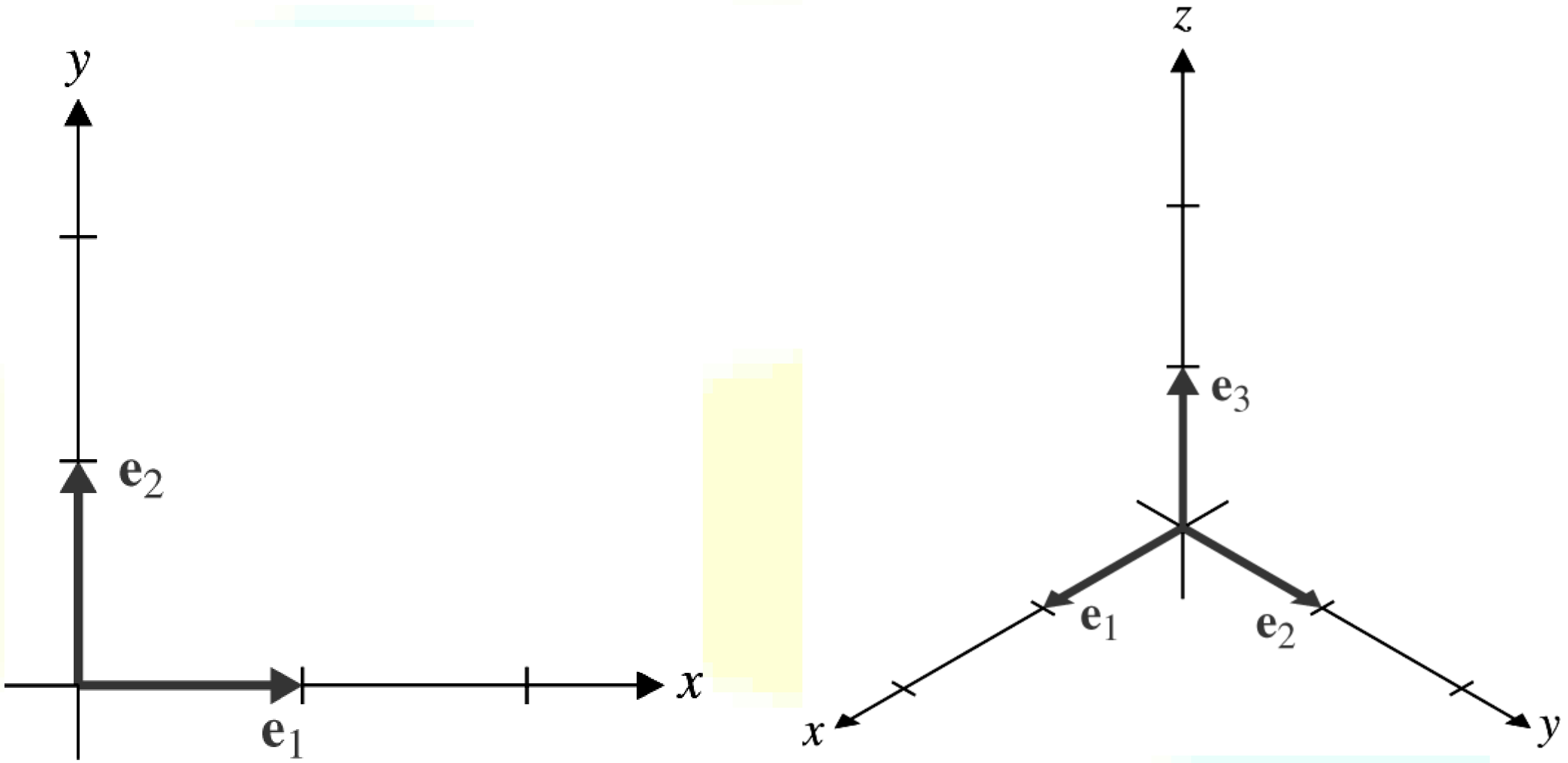


圖 1.25　在 $\mathbb{R}_2$ 與 $\mathbb{R}_3$ 中的標準單位向量

長度與角度：點積

- 在$\boldsymbol{R}^n$中，我們通常會定義單位向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$，其中$\mathbf{e}_i$的第$i$個分量為1，其餘分量皆為0。在線性代數中，這類的向量會常常出現，因而被稱為標準單位向量(standard unit vectors).

例

- 將向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 正規化。

- 解：

  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ ，所以我們可得出一個與**v**同方向的單位向量

$$\boxed{\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v} = (1/\sqrt{14})\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}}$$

長度與角度：點積

定理1.4

柯西不等式

對 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$，

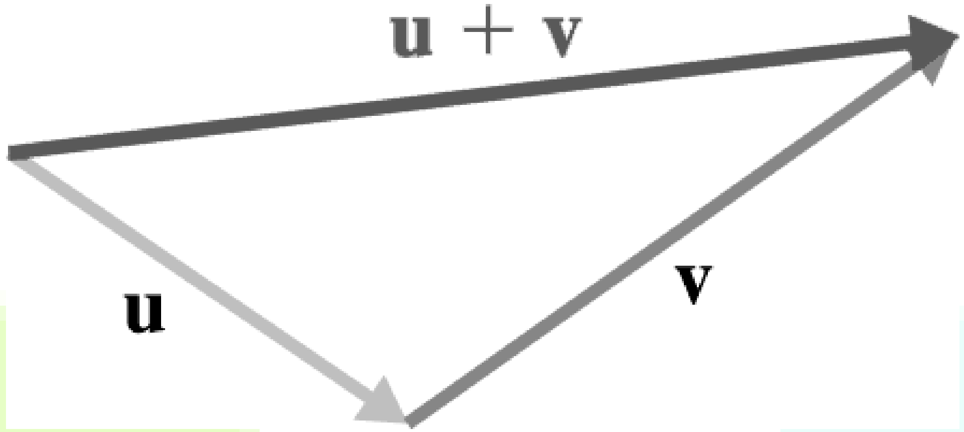
$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

- 習題第55與56題將分別從代數與幾何的觀點來證明這個不等式。

長度與角度：點積

- 在R^2或R^3這些我們可直接對之運用幾何的空間中，從圖形(諸如圖1.26) 便可清楚看到 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$，其中**u**與**v**為任意向量。

現在我們要證明該不等式在R^n中也為真。



1.26 三角不等式

長度與角度：點積

定理**1.5**

三角不等式

對 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

長度與角度：點積

定義　$\mathbb{R}^n$ 中，向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 間的距離 (distance) $\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 定義為

$$\mathrm{d}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

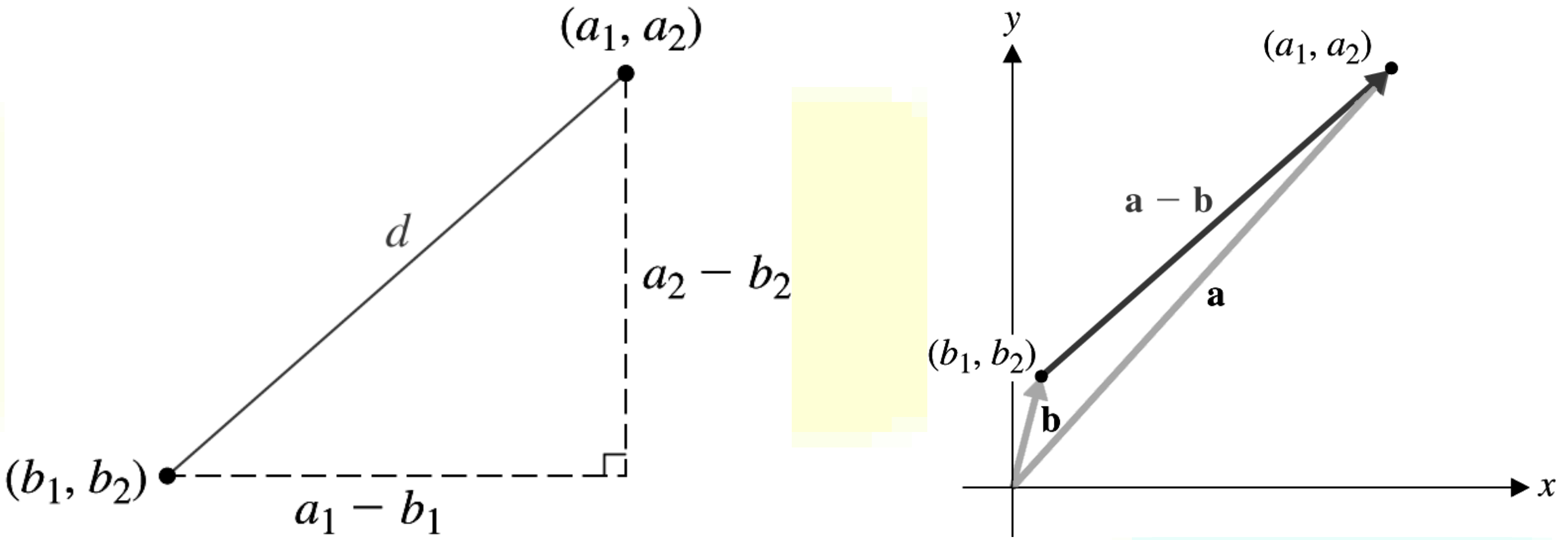


圖 1.28　$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$

例

- 找出 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ 間的距離。

- 解：

  我們算出 $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，所以

$$\boxed{d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2}$$

長度與角度：點積

[角度]

- 在$\boldsymbol{R}^2$或$\boldsymbol{R}^3$空間中，非零向量u 與v 間的角度θ指的是$0 \leq \theta \leq 180^\circ$範圍內的角度，例如圖1.29.

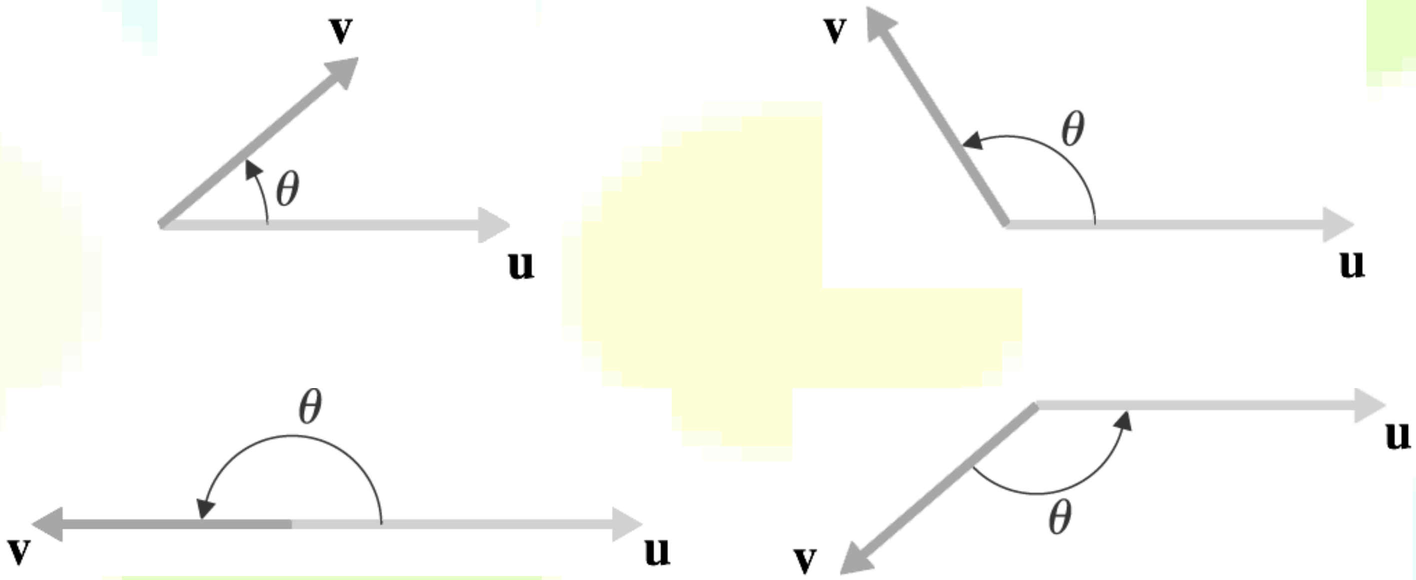


圖 1.29　u 與 v 間的角度θ

長度與角度：點積

- 在圖1.30 中，考慮由向量**u**,**v**與**u**－**v**構成的三角形，其中 θ 為**u** 與**v** 間的角度。應用正弦定律，我們得到

$$\boxed{\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta}$$

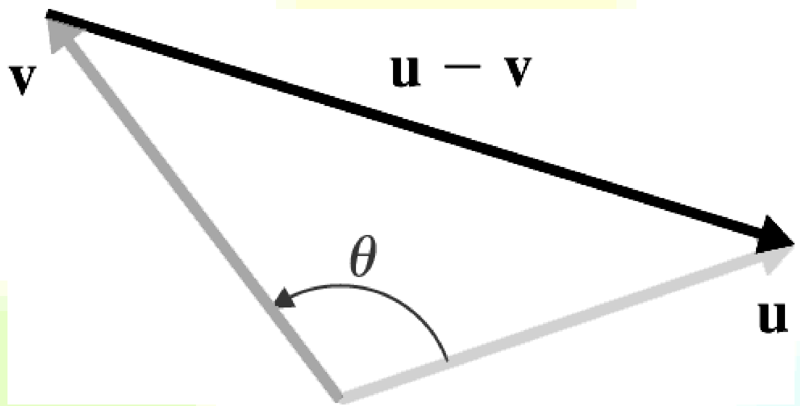


圖 1.30

長度與角度：點積

- 將上式左邊展開，並重複運用 $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$，可得到

$$\boxed{\|\mathbf{u}\|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta}$$

- 將上式整理化簡後，便可得到 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$，由此我們獲得以下公式，即非零向量**u**與**v**間角度 θ 的餘弦公式。我們將之寫成一個定義。

定義　對 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$，及其夾角 θ

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

例

- 計算**u**=[2,1,-2]與**v**=[1,1,1]間的角度。
  - 解：

我們分別算出 *u • v=2 • 1+1 • 1+(-2) • 1=1*

$$\boxed{\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3}$$

以及 $$\boxed{\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}}$$

所以 $$\boxed{\cos\theta = 1/3\sqrt{3}}$$

因此 $\theta = \cos^{-1}(1/3\sqrt{3}) \approx 1.377$ 弧度，或是78.9°

長度與角度：點積

[正交向量]

- 現在我們就將垂直的概念推廣到$\boldsymbol{R}^n$空間，並將之稱作正交(orthogonality)。

定義 對 $\mathbb{R}^n$ 中的兩非零向量 **u** 與 **v**，若 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$，則稱 **u** 與 **v** 為正交的 (orthogonal)。

- 由於對$\boldsymbol{R}^n$中任意向量**v**，皆有$\mathbf{0}\cdot\mathbf{v}=0$，所以零向量對每一向量都為正交。

例

- 在$\boldsymbol{R}^3$中，**u**=[1,1,-2]與**v**=[3,1,2]為正交，因為 **u** • **v**=3+1-4=0。

- 運用正交的概念，我們可很容易證明$\boldsymbol{R}^n$中的畢氏定理為真。

長度與角度：點積

定理1.6

畢氏定理

對 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ 的充要條件是 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 為正交。

長度與角度：點積

[投影]

- 一個向量在另一個向量上的投影。
- 如圖1.33 所示，要找出點B 到直線 ℓ (在$\mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3$空間) 的距離，此問題可簡化為找出垂線段 $\overline{PB}$ 的長度，或說是向量$\overrightarrow{PB}$的長度也可。
- 若我們在直線 ℓ上選擇一點A，則在直角三角形 $\triangle APB$中，其它兩個向量為底邊向量與斜邊向量 $\overrightarrow{AB}$。$\overrightarrow{AP}$ 被稱作$\overrightarrow{AB}$在直線 ℓ上的「投影」。

長度與角度：點積

- 考慮兩個非零向量**u**與**v**。令**p**為從**v**投影到**u**的垂直向量，且令θ為**u**與**v**的夾角，如圖1.34。

- 明顯的，$\mathbf{p} = \|\mathbf{p}\|\hat{\mathbf{u}}$，其中$\hat{\mathbf{u}} = (1/\|\mathbf{u}\|)\mathbf{u}$為與**u**同方向的單位向量。此外，由基本三角學可知

$$\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

長度與角度：點積

- 又我們已知 $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$。所以，代入後，我們得到

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{p} &= \|\mathbf{v}\|\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right)\left(\frac{1}{\|\mathbf{u}\|}\right)\mathbf{u}\\ &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right)\mathbf{u}\\ &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}\end{aligned}}$$

這就是我們所要的公式，且其為以下定義的基礎

長度與角度：點積

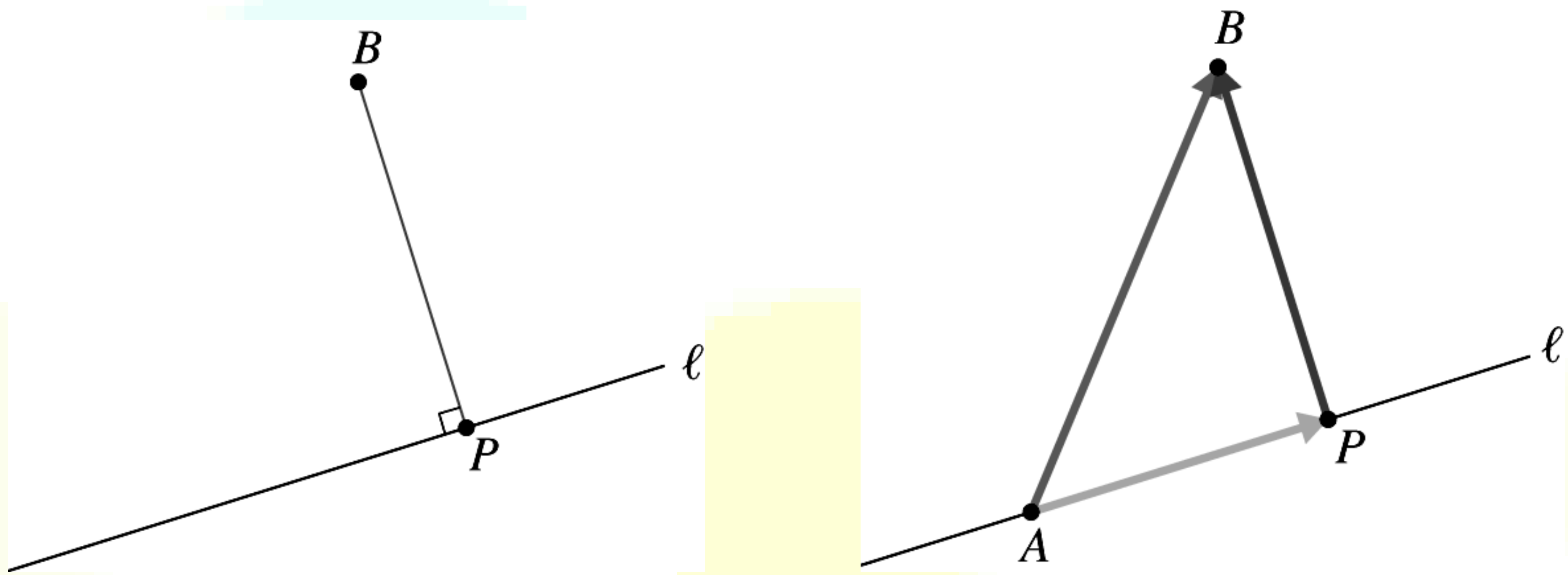


圖 1.33　從一點到一直線的距離

長度與角度：點積

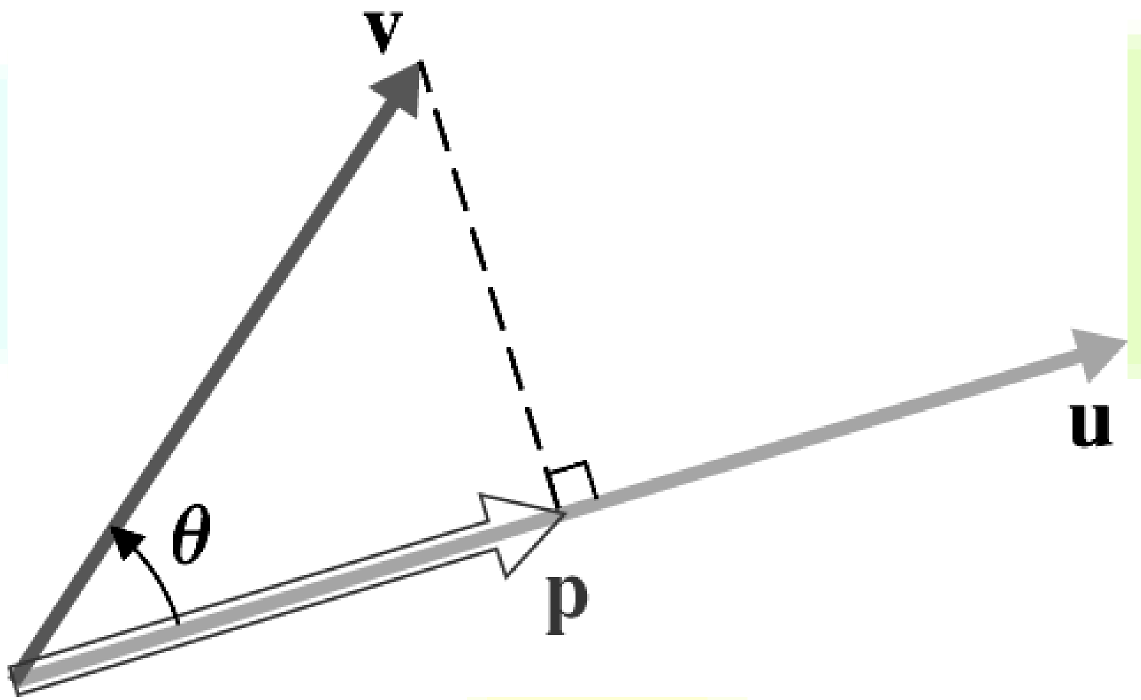


圖 1.34　v 在 u 上的投影

長度與角度：點積

定義 若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 為 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，且 $\mathbf{u}\neq 0$，則 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 上的投影 (the projection of v onto $\mathbf{u}$) 即為向量 $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$，且被定義如下

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}$$

- 若**u**與**v**的夾角為鈍角，如圖1.35 所示，則$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$的方向將與**u**反向，即$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$為向量**u**的負係數積。
- 若**u**為單位向量，則$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})=(\mathbf{u}\bullet\mathbf{v})\mathbf{u}$。(為什麼?)

例

- 找出以下各題中**v**在**u**上的投影。

(a) $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{u}=\mathbf{e}_3$

(c) $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1/2\\1/2\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$

解答

- 解：

(a)我們計算 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}=1$ 與，$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=5$

所以

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})=\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/5\\1/5\end{bmatrix}}$$

(b)既然$\mathbf{e}_3$為單位向量，

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{v})=(\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{v})\mathbf{e}_3=3\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}}$$

解答

(c)我們發現 $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = 1$。所以，

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{3(1+\sqrt{2})}{2}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3(1+\sqrt{2})}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

直線與平面

[R^2與R^3上的直線]

定義 $\mathbb{R}^2$ 中一直線 ℓ 方程式的法式 (normal form of the equation of a line ℓ) 為

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p})=0 \quad \text{或} \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}$$

其中 $\mathbf{p}$ 為 ℓ 上一特定點，而 $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$ 為一個 ℓ 的法向量。

ℓ 的方程式一般式 (general form of the equation of ℓ) 為 $ax+by=c$,

其中 $\mathbf{n}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 為一個 ℓ 的法向量。

直線與平面

定義　$\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 空間中一直線 ℓ 的向量式 (vector form of the equation of a line ℓ) 為

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

其中 $\mathbf{p}$ 為 ℓ 上的特定點，而 $\mathbf{d} \neq 0$ 為 ℓ 的一個方向向量。

對應到直線向量式分量的方程式稱作 ℓ 的參數式 (parametric equations of ℓ)。

例

- 找出R^3空間中通過點P=(1, 2,-1)，且平行向量

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ 的直線之向量式與參數式。

- 解：

方程式$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{d}$ 的向量式為 $$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

參數式為 $$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 + 5t \\ y &= 2 - t \\ z &= -1 + 3t \end{aligned}}$$

長度與角度：點積

附註

- 一給定直線ℓ的向量式與參數式寫法並非只有一種，事實上，寫法有無窮多個，因為ℓ上的任一點皆可用來作為出發點p，並決定ℓ的一個方向向量。但注意，ℓ的所有方向向量彼此間只差異倍數關係。

例

- 已知「兩點決定一直線」。找出$\boldsymbol{R}^3$空間中由點 P=(-1,5,0) 與Q=(2,1,1) 決定ℓ的直線向量式。

- 解：

由於ℓ上任一點皆可作為特定點(出發點)**p**，因此我們就選P作為該特定點(選Q 也一樣可)。

再選取 $\mathbf{d} = \overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ 作為方向向量(或此向量的其它係數積)。

解答

所以我們得到

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

直線與平面

[R^3空間平面]

定義 $\mathbb{R}^3$ 中一平面 $\mathscr{P}$ 方程式的法式 (normal form of the equation of a plane $\mathscr{P}$) 為

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p})=0 \quad \text{或} \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}$$

其中 $\mathbf{p}$ 為 $\mathscr{P}$ 上一特定點，且 $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$ 為一個 $\mathscr{P}$ 的法向量。

$\mathscr{P}$ 的方程式一般式 (general form of the equation of $\mathscr{P}$) 為 $ax+by+cz=d$，其中 $\mathbf{n}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 為一個 $\mathscr{P}$ 的法向量。

解答

- 找出包含點P=(6,0,1) 與法向量 $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$的平面方程式的法式與一般式。

- 解：

  運用

$$\boxed{\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

  可得， n • p=1 • 6+2 • 0+3 • 1=9

  所以法式n • x=n • p變成為一般式x+2y+3z=9

直線與平面

定義 $\mathbb{R}^3$ 空間中一平面 $\mathscr{P}$ 的向量式 (vector form of the equation of a plane $\mathscr{P}$) 為

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

其中 $\mathbf{p}$ 為 $\mathscr{P}$ 上的一點，而 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 則為 $\mathscr{P}$ 的方向向量 ($\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 皆為非零向量，且皆平行 $\mathscr{P}$，但 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 相互並不平行)。

對應到平面向量式分量的方程式稱作 $\mathscr{P}$ 的參數式 (parametric equations of $\mathscr{P}$)。

例

- 找出例1.23中平面方程式的向量式與參數式。

▸ 解：

我們需要先找出兩個方向向量。在平面$\mathscr{P}$上，已知有一點P=(6, 0, 1)，若我們可再找出$\mathscr{P}$上其它任兩點Q與R，則向量PQ和向量PR便可作為方向向量(當然，此二向量須滿足彼此不平行之條件)。歷經試誤過程，我們發現Q=(9,0,0) 與R=(3,3,0)皆滿足一般式$x+2y+3z=9$，所以是在平面上。

解答

- 然後，我們計算

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \mathbf{v} = \overrightarrow{PR} = \mathbf{r} - \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

發現兩者間並無倍數關係，所以可作為方向向量。所以，我們得到$\mathscr{P}$的向量方程式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

解答

- 及對應的參數式

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 6 + 3s - 3t \\ y &= \phantom{6 + 3s -{}} 3t \\ z &= 1 - s - t \end{aligned}}$$

(想想看，若我們改選R＝(0,0,3) 來作為「P 點」的話，結果又會是如何呢？)

解答

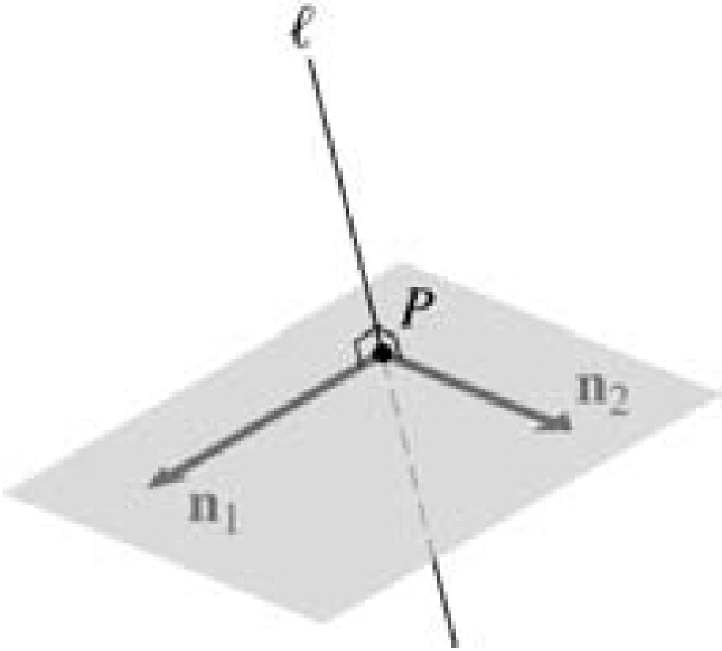


圖 1.59　兩條互不平行的法線決定一直線

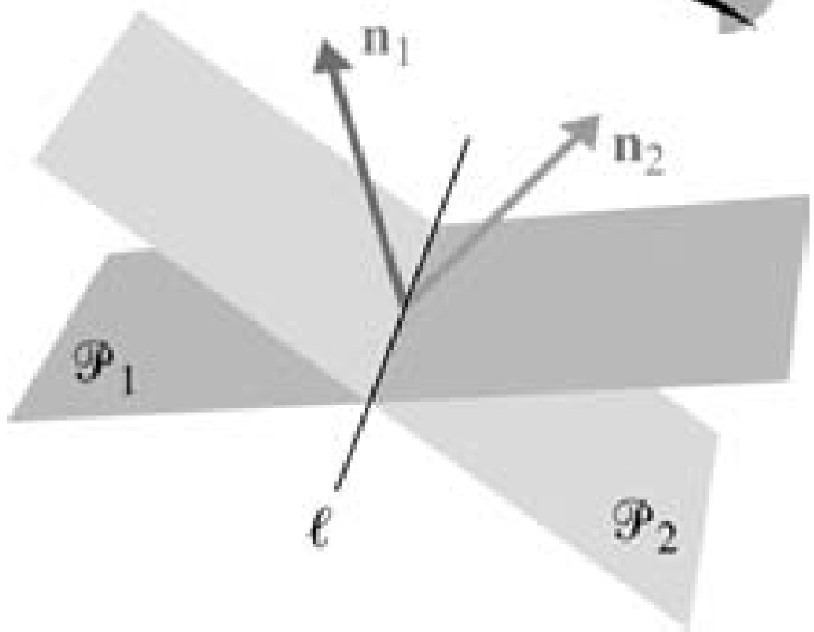


圖 1.60　兩互不平行平面之交集為一直線

直線與平面

表 1.2　$\mathbb{R}^2$ 的直線方程式

法式	一般式	向量式	參數式
$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}$	$ax+by=c$	$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{d}$	$\begin{cases}x=p_1+td_1\\y=p_2+td_2\end{cases}$

表 1.3　$\mathbb{R}^3$ 中的直線與平面

	法式	一般式	向量式	參數式
直線	$\begin{cases}\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{p}_1\\\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{p}_2\end{cases}$	$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\end{cases}$	$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{d}$	$\begin{cases}x=p_1+td_1\\y=p_2+td_2\\z=p_3+td_3\end{cases}$
平面	$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}$	$ax+by+cz=d$	$\mathbf{x}=\mathbf{p}+s\mathbf{u}+t\mathbf{v}$	$\begin{cases}x=p_1+su_1+tv_1\\y=p_2+su_2+tv_2\\z=p_3+su_3+tv_3\end{cases}$

(物件維度)＋(所需的方程式(一般式)個數)＝背景空間的維度

例

- 直線通過點$A=(3,1,1)$，且其方向向量為 $\mathbf{d}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$。找出點$B=(1,0,2)$到直線$\ell$的距離。

▶ 解：

如同我們已確定的，我們必需先計算向量PB的長度，其中P 為ℓ上的點，且為從B 出發之垂線終點(見圖1.61)。若我們令v=向量AB，則向量AP= $\mathrm{proj}_d(v)$且向量PB=v-$\mathrm{proj}_d(v)$(見圖1.61)。以下步驟則為本題必需的計算：

解答

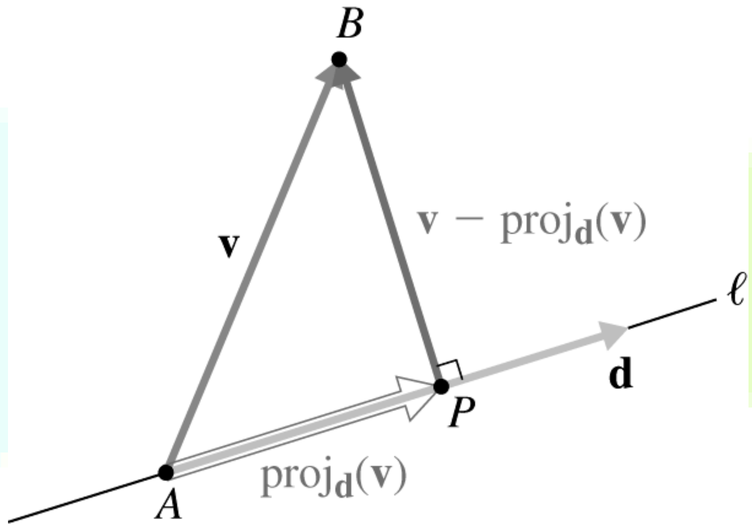


圖 1.61　$d(B, \ell) = \|\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})\|$

步驟1： $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

解答

步驟2：**v**在**d**上的投影為

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{d}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{d}\cdot\mathbf{d}}\right)\mathbf{d}$$

$$= \left(\frac{(-1)\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1}{(-1)^2 + 1 + 0}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

解答

步驟3：我們所要的向量為

$$\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

步驟4：從B到ℓ的距離d(B,ℓ)為

$$\|\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})\| = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|$$

解答

運用定理1.3 (b) 來簡化計算，我們得到

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{d}}(\mathbf{v})\| &= \tfrac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix}-3\\-3\\2\end{bmatrix}\right\| \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{9+9+4} \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{22}\end{aligned}$$

解答

- 平面$\mathscr{P}$的一般式為$x+y-z=1$，找出點$B=(1,0,2)$到$\mathscr{P}$的距離。

▶ 解：

在此例中，我們必需先計算向量PB的長度，其中P 為$\mathscr{P}$上的點，且為從B 出發之垂線終點。如圖1.62 所示，若A 為$\mathscr{P}$上任一點，且我們設定$\mathscr{P}$的法向量為 $\mathbf{n}=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$使其起點為$A$，則我們需要找出向量$AB$在$\mathbf{n}$上的投影長度。再一次，以下步驟為本題必需的計算：

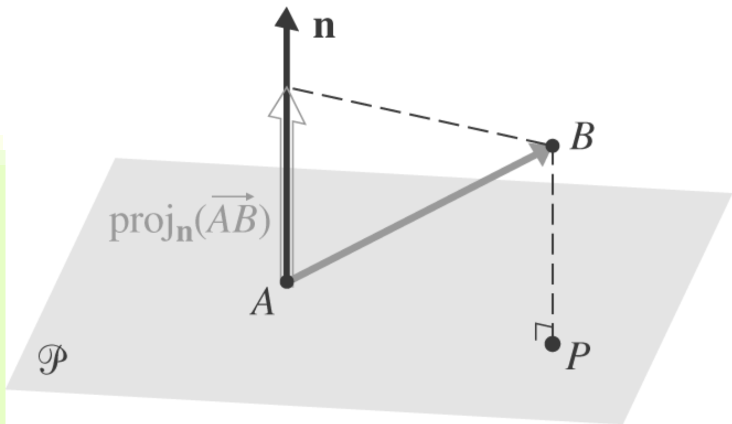
解答

步驟1：經由試誤，我們找到坐標滿足$x+y-z=1$的任意點。$A=(1, 0, 0)$ 即為所求。

步驟2：令

$$\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}-\mathbf{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$$

步驟3：**v**在**n**上的投影為



解答

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\right)\mathbf{n}$$

$$= \left(\frac{1\cdot 0 + 1\cdot 0 - 1\cdot 2}{1 + 1 + (-1)^2}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= -\tfrac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tfrac{2}{3} \\ -\tfrac{2}{3} \\ \tfrac{2}{3} \end{bmatrix}$$

解答

步驟4：從B＝(1,0,2) 到$\mathcal{P}$的距離d(B, $\mathcal{P}$) 為

$$\|\text{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\| = \left|-\tfrac{2}{3}\right| \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \tfrac{2}{3} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$$

通常，從B＝(x_0, y_0, z_0) 到平面方程式(一般式) 為 $ax+by+cz=d$的距離d(B, $\mathcal{P}$)公式為

$$\boxed{d(B, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

外積

- 向量外積(cross product of vectors)。

定義 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ 與 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ 的外積 (cross product) 為定義如下的

向量 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$：

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

外積

1.計算$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$。

(a) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$　(b) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\-4\\-6\end{bmatrix}$　(d) $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

2. 驗證$e_1Xe_2=e_3,e_2Xe_3=e_1$與$e_3Xe_1=e_2$。

3. 運用外積定義，證明$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$(如圖1.67 所示) 對$\mathbf{u}$與$\mathbf{v}$皆正交。

外積

4.運用外積來協助尋找以下平面的法式：

(a)通過點$P=(1,0,-2)$，平行$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$的平面。

(b)通過點$P=(0,-1,1)$，$Q=(2,0,2)$，和$R=(1,2,-1)$的平面。

5.證明以下的外積性質

(a) $\mathbf{v}\times\mathbf{u}=-(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

(b) $\mathbf{u}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$

(c) $\mathbf{u}\times\mathbf{u}=\mathbf{0}$

(d) $\mathbf{u}\times k\mathbf{v}=k(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$

(e) $\mathbf{u}\times k\mathbf{u}=\mathbf{0}$

(f) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$

外積

6.證明以下的外積性質

(a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$

(c) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$

7.運用問題5與6來改寫問題2與3。

8.令u 與v 為R^3上的向量，且θ 為**u** 與**v** 的夾角。

(a)證明$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$。[提示：運用問題6(c)。]

(b)證明由u與v決定的三角形面積(如圖1.68 所示)為$A=\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$

(c)運用(b) 的結果來計算頂點為和的三角形面積。