微積分

積分技巧

- 冪次公式
- 對數與指數型式
- 三角函數型式
- 進階三角函數型式
- 反三角函數型式
- 三角代換積分法
- 分部積分法
- 有理函數積分法
- 積分表積分法

冪次公式

一般化之冪次公式

$$\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C \qquad (n\neq -1) \tag{6.1}$$

例題 1 求 $\int\sqrt{\cos 4x}\,\sin 4x\,dx$ 。

解：將原式寫成

$$\int(\cos 4x)^{1/2}\sin 4x\,dx$$

此積分與式 (6.1) 很類似。事實上，如果我們令 $u=\cos 4x$ ，則 $du=-4\sin 4x\,dx$ 。因此，我們必須導入 **−4** 來配微分量，並將 **−1/4** 置於積分前。亦即

$$-\frac{1}{4}\int(\cos 4x)^{1/2}(-4\sin 4x)\,dx=-\frac{1}{4}\int u^{1/2}\,du \qquad \left[\begin{array}{l} u=\cos 4x \\ du=-4\sin 4x\,dx \end{array}\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C=-\frac{1}{6}\cos^{3/2}4x+C$$

END

例題2 求

$$\int \frac{e^x\,dx}{(1+2e^x)^3}$$

解：令 $u=1+2e^x$，則 $du=2e^x\,dx$，為了令積分與適當的型態相稱，我們須要導入一個 2 並且在積分之前放上 1/2。原式可化為

$$\frac{1}{2}\int \frac{2e^x\,dx}{(1+2e^x)^3}=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3}=\frac{1}{2}\int u^{-3}\,du \qquad \left[\begin{aligned} u&=1+2e^x\\ du&=2e^x\,dx\end{aligned}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{u^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{4}\frac{1}{u^2}+C$$

$$=-\frac{1}{4(1+2e^x)^2}+C$$

END

例題 3 求

$$\int \frac{\ln^2 x\, dx}{x}$$

解：乍看之下，本題與前兩題之形式截然不同，然而，由於 $d \ln x = (1/x)\, dx$，故令 $u = \ln x$ 則原式可化簡為

$$\int (\ln x)^2 \frac{dx}{x} = \int u^2\, du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C \qquad \begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \dfrac{1}{x} dx \end{bmatrix}$$

END

對數與指數型式

對數型式

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \tag{6.2}$$

指數型式

$$\int e^u \, du = e^u + C \tag{6.3}$$

$$\int a^u \, du = a^u \log_a e + C = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

例題 1 求

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

解：令 $u=x^2+1$，則 $du=2x\,dx$，因為 $n=-1$，所以式 (6.1) 無效，由式 (6.2) 可得：

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C \qquad \begin{bmatrix} u=x^2+1 \\ du=2x\,dx \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

其中 $\ln|x^2+1|=\ln(x^2+1)$ 乃是因為 $x^2+1>0$。

註：當 x^2+1 的次方不等於 1 時，可利用冪次公式求解。例如，求

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

時，同樣令 $u=x^2+1$，則 $du=2x\,dx$。原式可化為

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2}=\frac{1}{2}\int u^{-2}\,du=\frac{1}{2}\frac{u^{-1}}{-1}+C$$

$$=-\frac{u^{-1}}{2}+C=-\frac{1}{2u}+C=-\frac{1}{2(x^2+1)}+C$$

END

例題 2 求

$$\int \frac{dx}{x(\ln x + 1)}$$

解：因 $\ln x$ 的導函數為 $1/x$，故 $\ln x + 1$ 的導函數亦為 $1/x$。令 $u = \ln x + 1$，則 $du = dx/x$，原式可化為

$$\int \frac{1}{\ln x + 1} \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\ln x + 1| + C \qquad \left[\begin{array}{l} u = \ln x + 1 \\ du = \dfrac{1}{x} dx \end{array}\right]$$

END

例題 3 求 $\int e^{\cos 5\theta} \sin 5\theta \, d\theta$。

解：此積分看似符合式 (6.3)。令 $u = \cos 5\theta$，得：$du = -5 \sin 5\theta \, d\theta$，則

$$\int e^{\cos 5\theta} \sin 5\theta \, d\theta = -\frac{1}{5} \int e^{\cos 5\theta} (-5 \sin 5\theta) \, d\theta$$

$$= -\frac{1}{5} \int e^{u} \, du = -\frac{1}{5} e^{u} + C = -\frac{1}{5} e^{\cos 5\theta} + C$$

END

例題 4 求

$$\int \frac{e^{\text{Arcsin } 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$$

解：利用式 (6.3)：

$$\int \frac{e^{\text{Arcsin } 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int e^{\text{Arcsin } 2x} \frac{2\, dx}{\sqrt{1-4x^2}} \qquad \left[\begin{array}{l} u = \text{Arcsin } 2x \\ du = \dfrac{2\, dx}{\sqrt{1-4x^2}} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2}e^u + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{\text{Arcsin } 2x} + C$$

END

例題 5 求

$$\int_0^1 \frac{e^x\, dx}{1+e^x}$$

解：雖然被積分函數含有 e^x，但此題並不是指數型式。由於 $d(1+e^x) = e^x\, dx$，利用式 (6.2)，可得：

$$\int_0^1 \frac{e^x\, dx}{1+e^x} = \ln(1+e^x)\Big|_0^1 = \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\frac{1+e}{2}$$

END

三角函數型式

$$\int \cos u \, du = \sin u + C \tag{6.4}$$

$$\int \sin u \, du = -\cos u + C \tag{6.5}$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C \tag{6.6}$$

$$\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C \tag{6.7}$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \tag{6.8}$$

$$\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C \tag{6.9}$$

$$\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C \tag{6.10}$$

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc u| + C \tag{6.11}$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + C \tag{6.12}$$

$$\int \csc u \, du = \ln|\csc u - \cot u| + C \tag{6.13}$$

例題 1 求 $\int \sec 4x \tan 4x \, dx$ 。

解：令 $u = 4x$ 則 $du = 4\,dx$ ，可得：

$$\frac{1}{4}\int \sec 4x \tan 4x (4\,dx) = \frac{1}{4}\int \sec u \tan u \, du$$

$$= \frac{1}{4}\sec u + C \qquad \text{利用式 (6.8)}$$

$$= \frac{1}{4}\sec 4x + C$$

END

例題 2 求 $\int x^2 \cot x^3 \, dx$ 。

解：令 $u = x^3$ 則 $du = 3x^2\,dx$ 。原式可化為：

$$\frac{1}{3}\int \cot x^3 (3x^2\,dx) = \frac{1}{3}\int \cot u \, du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\sin u| + C \qquad \text{利用式 (6.11)}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\sin x^3| + C$$

END

例題 3 求 $\int e^{2x} \sec e^{2x}\, dx$ 。

解：令 $u = e^{2x}$ ；則 $du = 2e^{2x}\, dx$ 。化原式為：

$$\frac{1}{2}\int (\sec e^{2x})(2e^{2x})\, dx = \frac{1}{2}\int \sec u\, du \qquad \begin{bmatrix} u = e^{2x} \\ du = 2e^{2x}\, dx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C \qquad \text{利用式 (6.12)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec e^{2x} + \tan e^{2x}| + C$$

END

進階三角函數型式

本節所需之三角恆等式

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{6.14}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \tag{6.15}$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \tag{6.16}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \tag{6.17}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{6.18}$$

積分類型

類型 1： $\int \sin^n u \cos^m u \, du$

類型 2： $\int \tan^n u \sec^m u \, du$

類型 3： $\int \cot^n u \csc^m u \, du$

類型 1：n 或 m 為奇數

以等式 (6.14) 來積分

$$\int \sin^n u \cos^m u \, du$$

例題 1 積分 $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$ 。

解：此積分的關鍵為改寫 $\cos^3 x \, dx = \cos^2 x(\cos x \, dx)$ 然後化 $\cos^2 x$ 為 $1-\sin^2 x$ ，則

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \, \mathbf{\cos^2 x} \, (\cos x \, dx) \\ &= \int \sin^2 x(\mathbf{1-\sin^2 x})(\cos x \, dx)\end{aligned}$$

此步驟的理由為：若令 $u=\sin x$ ，則 $du=\cos x \, dx$ ，那麼可化原式為

$$\int u^2(1-u^2) \, du = \int (u^2-u^4) \, du \qquad \begin{bmatrix} u=\sin x \\ du=\cos x \, dx \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+C=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

END

例題 2 積分 $\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ 。

解：我們留 $\sin x\, dx$ 給微分量 du ，另將其餘的 $\sin^4 x$ 以 $(1-\cos^2 x)^2$ 表示：

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx &= \int \sin^4 x \cos^4 x (\sin x \, dx) \\ &= \int (\mathbf{\sin^2 x})^2 \cos^4 x (\sin x \, dx) \\ &= \int (\mathbf{1-\cos^2 x})^2 \cos^4 x (\sin x \, dx)\end{aligned}$$

現在，令 $u=\cos x$ ，則 $du=-\sin x \, dx$ ，那麼，原式可改寫成

$$\begin{aligned}&-\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x(-\sin x \, dx) \\ &= -\int (1-u^2)^2 u^4 \, du \qquad \begin{bmatrix} u=\cos x \\ du=-\sin x \, dx \end{bmatrix} \\ &= -\int (u^4 - 2u^6 + u^8) \, du \\ &= -\frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{7}u^7 - \frac{1}{9}u^9 + C \\ &= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C\end{aligned}$$

END

例題3 積分 $\int \cos^3 7x\,dx$ 。

解：

$$\int \cos^3 7x\,dx = \int \cos^2 7x(\cos 7x\,dx)$$

$$= \int (1-\sin^2 7x)(\cos 7x\,dx)$$

$$= \frac{1}{7}\int (1-\sin^2 7x)(7\cos 7x\,dx) \qquad \begin{bmatrix} u = \sin 7x \\ du = 7\cos 7x\,dx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\int (1-u^2)\,du$$

$$= \frac{1}{7}\left(u - \frac{1}{3}u^3\right) + C$$

$$= \frac{1}{7}\sin 7x - \frac{1}{21}\sin^3 7x + C$$

END

類型 1：*n* 及 *m* 皆為偶數

以等式 (6.17) 及 (6.18) 來積分

$$\int \sin^n u\, du \qquad \int \cos^m u\, du \qquad \int \sin^n u \cos^m u\, du$$

例題 4 積分 $\int \sin^4 2x\, dx$ 。

解：由等式 (6.18)，

$$\int \sin^4 2x\, dx = \int (\sin^2 2x)^2\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)\, dx$$

再利用等式 (6.17)，上式可化為

$$\frac{1}{4}\left(\int dx - 2\int \cos 4x\, dx + \int \frac{1+\cos 8x}{2}\, dx\right)$$

故原式可化簡如下：

$$\int \sin^4 2x\, dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x\, dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 8x\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int \cos 4x(4\, dx) + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\int \cos 8x(8\, dx)$$

所以

$$\int \sin^4 2x\, dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{64}\sin 8x + C$$
$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + C$$

END

類型 2：n 奇數或 m 為偶數

以等式 (6.15) 來積分

$$\int \tan^n u \sec^m u \, du$$

例題 5 積分 $\int \tan^4 x \sec^4 x\, dx$ 。

解：將正割 (secant) 之偶冪次式留下 $\sec^2 x\, dx$ 作為 du 並利用等式 (6.15) 轉化其餘的正割為正切 (tangent)：

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x \sec^4 x\, dx &= \int \tan^4 x\, \mathbf{\sec^2 x}\, (\sec^2 x)\, dx \\ &= \int \tan^4 x(\mathbf{1+\tan^2 x})(\sec^2 x\, dx)\end{aligned}$$

令 $u = \tan x$ ，則 $du = \sec^2 x\, dx$ 。可得

$$\begin{aligned}\int u^4(1+u^2)\, du &= \int (u^4+u^6)\, du = \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C \\ &= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C\end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} u &= \tan x \\ du &= \sec^2 x\, dx \end{aligned}\right]$$

END

例題 6 積分 $\int \tan^3 3x \sec 3x\, dx$ 。

解：本題之**正割** (secant) 的冪次為奇數，例題 5 的方法無效。但 $d(\sec 3x) = 3\sec 3x \tan 3x\, dx$ ，由**正切** (tangent) 的奇數冪次及等式 (6.15) 提供了下述的化簡方式：

$$\begin{aligned}\int \tan^3 3x \sec 3x\, dx &= \int \mathbf{\tan^2 3x}\,(\sec 3x \tan 3x\, dx)\\ &= \int (\mathbf{\sec^2 3x - 1})(\sec 3x \tan 3x)\, dx\end{aligned}$$

令 $u = \sec 3x$ ，則 $du = \mathbf{3}\sec 3x \tan 3x\, dx$ 。可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\int (\sec^2 3x - 1)(\mathbf{3}\sec 3x \tan 3x\, dx) &= \frac{1}{3}\int (u^2 - 1)\, du\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}u^3 - u\right) + C\\ &= \frac{1}{9}\sec^3 3x - \frac{1}{3}\sec 3x + C\end{aligned}$$

END

類型 2：$m = 0$，n 為偶數或奇數

以等式 (6.15) 來積分

$$\int \tan^n u\, du$$

類型 2：$n = 0$，m 為偶數

以等式 (6.15) 來積分

$$\int \sec^m u\, du$$

例題 7 求 $\int \tan^4 x\,dx$。

解：利用等式 (6.15)

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\,dx &= \int \tan^2 x\,\mathbf{\tan^2 x}\,dx\\ &= \int \tan^2 x(\mathbf{\sec^2 x - 1})\,dx\\ &= \int \tan^2 x\sec^2 x\,dx - \int \tan^2 x\,dx\\ &= \int \tan^2 x\sec^2 x\,dx - \int (\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \tan^2 x\sec^2 x\,dx - \tan x + x + C\\ &= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C \qquad \begin{bmatrix} u = \tan x\\ du = \sec^2 x\,dx\end{bmatrix}\end{aligned}$$

END

例題 8 積分 $\int \cot x \csc^4 x\, dx$ 。

解：

$$\int \cot x \csc^2 x \csc^2 x\, dx = \int \cot x(1+\cot^2 x)(\csc^2 x\, dx)$$

$$= -\int u(1+u^2)\, du \qquad \left[\begin{array}{l} u = \cot x \\ du = -\csc^2 x\, dx \end{array}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cot^2 x - \frac{1}{4}\cot^4 x + C$$

END

反三角函數型式

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{Arcsin}\frac{u}{a} + C \qquad \textbf{(6.19)}$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\text{Arctan}\frac{u}{a} + C \qquad \textbf{(6.20)}$$

例題 1 積分

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}}$$

解：基於先前的經驗，我們可能會想到利用 u 代換法，令 $u=4-x^4$ 來求解。很不幸的，$du=-4x^3\,dx$ 無法與 $x\,dx$ 配合。將題目化為適當的型式即完成此題一大半的工作！事實上，可將原式寫成

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^4}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}}$$

令 $u=x^2$，則 $du=\mathbf{2}x\,dx$，那麼上式即化成式 (6.19) 的型態

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2}x\,dx}{\sqrt{2^2-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{2^2-u^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{u}{2}+C = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{x^2}{2}+C$$

利用了式 (6.19)，其中 $a=2$。

END

例題 2 積分

$$\int \frac{t^2\,dt}{9+4t^6}$$

解：原式可改寫成

$$\int \frac{t^2\,dt}{3^2+(2t^3)^2}$$

令 $u=2t^3$，則 $du=6t^2\,dt$，可得

$$\frac{1}{6}\int \frac{6t^2\,dt}{3^2+(2t^3)^2}=\frac{1}{6}\int \frac{du}{3^2+u^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\text{Arctan}\frac{u}{3}+C \qquad \begin{bmatrix} u=2t^3 \\ du=6t^2\,dt \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{18}\text{Arctan}\frac{2t^3}{3}+C$$

利用了式 (6.20)，其中 $a=3$。

END

例題3 求

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5}$$

解：先將分母配方，亦即加上再減去 x 係數的一半的平方：

$[(1/2)(-4)]^2 = \mathbf{4}$ ，則

$$x^2-4x+\mathbf{4}-\mathbf{4}+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1$$

令 $u=x-2$ ，則 $du=dx$ ，可得：

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+5}=\int \frac{dx}{(x-2)^2+1}=\int \frac{du}{u^2+1} \qquad \begin{bmatrix} u=x-2 \\ du=dx \end{bmatrix}$$

$$=\text{Arctan}\, u+C=\text{Arctan}(x-2)+C$$

END

例題 4 求

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$$

解：二次式可改寫如下：

$$2-x^2-2x=2-(x^2+2x)=2-(x^2+2x\mathbf{+1-1})$$
$$=3-(x^2+2x+1)=3-(x+1)^2$$

因此

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3-(x+1)^2}}$$

令 $u=x+1$，則 $du=dx$，得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-(x+1)^2}}=\int \frac{du}{\sqrt{3-u^2}}=\text{Arcsin}\frac{u}{\sqrt{3}}+C=\text{Arcsin}\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$$

利用式 (6.19)，其中 $a=\sqrt{3}$ 。

END

三角代換積分法

表 6.1　三角代換法則

當被積分函數包含…	令…	可得…
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta$	$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta \quad (a>0)$
$\sqrt{x^2+a^2}$	$x=a\tan\theta$	$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec\theta \quad (a>0)$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta \quad (a>0)$

例題 1 積分

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$$

解：為了消去根號，可令 $\boldsymbol{x = 2\sec\theta}$，則 $\boldsymbol{dx = 2\sec\theta\tan\theta\,d\theta}$（常見的錯誤是忘了將 dx 換掉），那麼，

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4} &= \sqrt{4\sec^2\theta-4} = \sqrt{4(\sec^2\theta-1)} = 2\sqrt{\sec^2\theta-1}\\ &= 2\sqrt{\tan^2\theta} = 2\tan\theta\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx &= \int \frac{(2\tan\theta)(2\sec\theta\tan\theta)\,d\theta}{2\sec\theta}\\ &= 2\int \tan^2\theta\,d\theta = 2\int(\sec^2\theta-1)\,d\theta\\ &= 2(\tan\theta-\theta)+C\end{aligned}$$

剩下的工作為將上式以變數 x 表示。單獨的 θ ，可由當初所令的 $x/2=\sec\theta$ 得到

$$\theta = \mathrm{Arcsec}\frac{x}{2}$$

至於 θ 的函數，我們需要利用三角函數的定義進一步處理。因為

$$\sec\theta = \frac{x}{2}$$

我們可以畫一個如圖 6.1 中的三角形，其斜邊長為 x ，鄰邊長為 2。可由畢氏定理知對邊長為 $\sqrt{x^2-4}$ 。如此，我們可得到所需要的所有三角函數。本題所需的 $\tan\theta=\sqrt{x^2-4}/2=(1/2)\sqrt{x^2-4}$ ，故

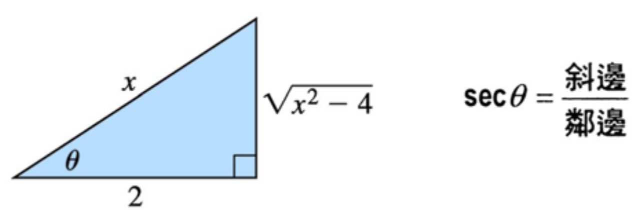


圖 6.1

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = 2(\tan\theta-\theta)+C$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}-\text{Arcsec}\,\frac{x}{2}\right)+C$$

$$= \sqrt{x^2-4}-2\ \text{Arcsec}\,\frac{x}{2}+C$$

註：根據圖 6.1，答案可以寫成另外一種方式。如果 $\sec\theta = x/2$，那麼 $\tan\theta = \sqrt{x^2-4}/2$，導致

$$\sqrt{x^2-4}-2\ \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}\right)+C$$

END

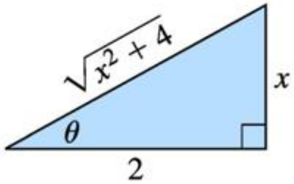
例題 2 積分 $\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx$ 。

解：令 $\boldsymbol{x=2\tan\theta}$ ，則 $dx=2\sec^2\theta\,d\theta$ ，那麼

$$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{4\tan^2\theta+4}=\sqrt{4(\tan^2\theta+1)}=2\sqrt{\tan^2\theta+1}$$
$$=2\sqrt{\sec^2\theta}=2\sec\theta$$

且 $x^3=8\tan^3\theta$ 。代入原式，可得

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx &= \int(8\tan^3\theta)(2\sec\theta)(2\sec^2\theta)\,d\theta\\ &=32\int\tan^3\theta\sec^3\theta\,d\theta\\ &=32\int\tan^2\theta\sec^2\theta(\sec\theta\tan\theta)\,d\theta\\ &=32\int(\sec^2\theta-1)(\sec^2\theta)(\sec\theta\tan\theta)\,d\theta\\ &=32\int(\sec^4\theta-\sec^2\theta)(\sec\theta\tan\theta\,d\theta)\end{aligned}$$



$\tan\theta = x/2$

圖 6.2

既然 $d(\sec\theta)=\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ ，可得

$$32\left(\frac{1}{5}\sec^5\theta-\frac{1}{3}\sec^3\theta\right)+C=\frac{32}{5}\sec^5\theta-\frac{32}{3}\sec^3\theta+C$$

再利用先前所令的 **$\tan\theta = x/2$** ，畫一個如圖 6.2 的三角形可得

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$$

所以

$$\int x^3\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{32}{5}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^5-\frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^3+C$$

$$=\frac{1}{5}(x^2+4)^{5/2}-\frac{4}{3}(x^2+4)^{3/2}+C$$

END

例題 3 試導出下列公式：

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2+a^2}|+C \tag{6.21}$$

解：令 $u = a\tan\theta$，則 $du = a\sec^2\theta\, d\theta$，那麼

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{a\sec\theta}$$

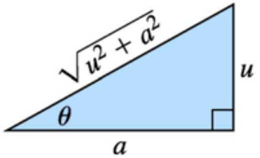
$$= \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C'$$

從先前所令的 $\tan\theta = u/a$ 及所對應的三角形（圖 6.3）可得

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{a}+\frac{u}{a}\right|+C'$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+a^2}+u}{a}\right|+C'$$

$$= \ln|u+\sqrt{u^2+a^2}| - \ln a + C'$$



$\tan\theta = u/a$

圖 6.3

令 $C = C' - \ln a$，可得式 (6.21)。(若 C' 為任意常數，則 $C' - \ln a$ 也是。)

END

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C \qquad \textbf{(6.22)}$$

分部積分法

分部積分公式

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \tag{6.23}$$

例題 1 求 $\int x \sin x\,dx$ 。

解：此積分與前幾小節介紹過的類型皆不相同。若我們隨意指派函數 u 及 dv ，例如令 $u = x,\ dv = \sin x\,dx$ ，則後續工作整理如下：

$u = x$	$dv = \sin x\,dx$	指派 u 及 dv
$du = dx$	$v = -\cos x$	求 du 及 v

du 及 v 乃是由所令的 u 及 dv 分別求得的。(積分常數併在最後的答案中。) 由式 (6.23)

$$\int x \sin x\,dx = uv - \int v\,du$$
$$= x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

也就是

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

問題順利解決了。倘若，函數 u 及 dv 的指派調換如下：

$$\begin{array}{c|c} u=\sin x & dv = x\,dx \\ \hline du=\cos x\,dx & v=\dfrac{1}{2}x^2 \end{array}$$

由式 (6.23)，可得

$$\int x\sin x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sin x-\frac{1}{2}\int x^2\cos x\,dx$$

這種表示式一點也沒錯，但一點也沒用，乃因為右式的積分式比原始題目更複雜了。

END

例題 2 積分 $\int x^2 \ln x\, dx$。

解：本題中，若指派 $d\upsilon = \ln x\, dx$，不易求出 υ，(在習題 6 中，可看到用分部積分法求 $\int \ln x\, dx$)，因此只能令 $u = \ln x\,, d\upsilon = x^2\, dx$，則：

$$\begin{array}{c|c} u = \ln x & d\upsilon = x^2\, dx \\ \hline du = \dfrac{1}{x}\, dx & \upsilon = \dfrac{1}{3}x^3 \end{array}$$

指派 u 及 dv

求 du 及 v

可得

$$\int x^2 \ln x\, dx = (\ln x)\left(\frac{1}{3}x^3\right) - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x}\, dx \qquad \int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

END

例題 3 求 $\int \text{Arctan}\, x\, dx$ 。

解：在此僅有一種指派 u 及 $d\upsilon$ 的選擇。

$$
\begin{array}{c|c}
u = \text{Arctan}\, x & d\upsilon = dx \\
\hline
du = \dfrac{dx}{1+x^2} & \upsilon = x
\end{array}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int \text{Arctan}\, x\, dx &= x\ \text{Arctan}\, x - \int \frac{x\, dx}{1+x^2} \\
&= x\ \text{Arctan}\, x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}
$$

END

例題 4 求 $\int x^2e^x\,dx$。

解：本題與例題 1 類似：$u=x^2$ 是一個好的選擇，因為 u 的導函數是一個較簡單的函數。令

$u=x^2$	$dv=e^x\,dx$
$du=2x\,dx$	$v=e^x$

現在式 (6.23) 右側的構成應該熟悉了，因此

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx=x^2e^x-2\left[\int xe^x\,dx\right]$$

右式可再用一次分部積分法處理：

$u=x$	$dv=e^x\,dx$
$du=dx$	$v=e^x$

因此

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\,dx&=x^2e^x-2\left[xe^x-\int e^x\,dx\right]\\&=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x\,dx\\&=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C\end{aligned}$$

END

例題 5 求 $\int e^x \cos x\, dx$。

解：此例中 u 及 dv 的兩種指派效果差不多，倘若，我們嘗試

$u = e^x$	$dv = \cos x\, dx$
$du = e^x\, dx$	$v = \sin x$

則

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$$

右式的積分型態與原題相同，所以似乎沒有進展的跡象，但倘若對右式的積分再以分部積分法處理一次：

$u = e^x$	$dv = \sin x\, dx$
$du = e^x\, dx$	$v = -\cos x$

可得

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx \right]$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

右式出現與原題相同的積分，移項可得：

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

所以

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x) + C$$

END

快速分部積分法

例1：求 $\int x^2 e^{-x} dx$

解：

	u		dv	
微分	x^2	+	e^{-x}	積分
	$2x$	-	$-e^{-x}$	
	2	+	e^{-x}	
	0		$-e^{-x}$	

原式＝ $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$

有理函數積分法

狀況 1：不同的線性因式

例題 1 積分

$$\int \frac{x+8}{(x-1)(x+2)}\,dx$$

解：被積分函數之分子次數為 1，分母次數為 2，故為真分式。而且，分母之因式皆相異（各只出現一次）。由法則 1，其中 $n=1$，可令

$$\frac{x+8}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \tag{6.24}$$

（在此僅有 2 個常數，用 A 及 B 比用含下標的 A_1, A_2 好）。主要的工作為求 A 及 B。利用通分的技巧，可得

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}&=\frac{A}{x-1}\cdot\frac{x+2}{x+2}+\frac{B}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-1}\\&=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

通分後之分子應與式 (6.24) 的左式之分子相等。也就是

$$A(x+2)+B(x-1)=x+8 \tag{6.25}$$

常數 A 及 B 可由 (1) 比較係數法及 (2) 代入適當的 x 值二種方法求得。

(a) **比較係數法**：將式 (6.25) 的左式乘開之後，合併化簡可得

$$
\begin{aligned}
A(x+2)+B(x-1) &= x+8 \\
Ax+2A+Bx-B &= x+8 \\
(A+B)x+(2A-B) &= x+8
\end{aligned}
$$

比較係數可得下列聯立方程式

$$
\begin{array}{lll}
A+B=1 & & \textbf{x 項之係數} \\
\underline{2A-B=8} & & \textbf{常數項} \\
3A \quad =9 & & \textbf{相加，得 } A=3 \\
A \quad =3 & &
\end{array}
$$

代入 $A+B=1$，得 $3+B=1$，即 $B=-2$。

以 $A=3, B=-2$ 代入式 (6.24)，得

$$\frac{x+8}{(x-1)(x+2)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$$

(b) 代入法：為了以代入法求 A 及 B。首先因為式 (6.25)

$$A(x+2)+B(x-1)=x+8$$

為一個恆等式，故對於所有的 x 值皆應成立。例如，令 $x=-2$，立即可得到 B：

$$\mathbf{x=-2:}\qquad \begin{aligned} A(-2+2)+B(-2-1)&=-2+8 \\ -3B&=6 \\ B&=-2 \end{aligned}$$

同樣的，x 以 1 代入可得 A：

$$\mathbf{x=1:}\qquad \begin{aligned} A(1+2)+B(1-1)&=1+8 \\ 3A&=9 \\ A&=3 \end{aligned}$$

同樣的，可得到：

$$\frac{x+8}{(x-1)(x+2)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$$

最後，代入原積分式求解：

$$\begin{aligned}\int\frac{x+8}{(x-1)(x+2)}\,dx&=\int\left(\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}\right)dx\\&=3\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C\\&=\ln|x-1|^3-\ln|x+2|^2+C\\&=\ln\left|\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}\right|+C\end{aligned}$$

END

例題 2 積分

$$\int \frac{5x+10}{(x+1)(x-2)(x+3)}\,dx$$

解：與例題 1 相同，分母之因式為相異的線性因式。依法則 1，其中 $n=1$，可令

$$\frac{5x+10}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

$$=\frac{A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

分子相同，可得

$$A(x-2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x-2)=5x+10$$

變數 x 分別以 $2,-3$ 及 -1 代入，可得

$$\boldsymbol{x=2:}\quad 0+B(2+1)(2+3)+0=5(2)+10$$

$$15B=20$$

$$B=\frac{4}{3}$$

$$\boldsymbol{x=-3:}\quad 0+0+C(-3+1)(-3-2)=5(-3)+10$$

$$10C=-5$$

$$C=-\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{x=-1:}\quad A(-1-2)(-1+3)+0+0=5(-1)+10$$

$$-6A=5$$

$$A=-\frac{5}{6}$$

將 A,B,C 代回，可得

$$\int \frac{5x+10}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$$

$$=\int\left(-\frac{5}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{4}{3}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=-\frac{5}{6}\ln|x+1|+\frac{4}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+3|+C$$

此答案，亦可改寫如下：

$$\frac{1}{6}(-5\ln|x+1|+8\ln|x-2|-3\ln|x+3|)+C$$

$$=\frac{1}{6}(-\ln|x+1|^5+\ln|x-2|^8-\ln|x+3|^3)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(x-2)^8}{(x+1)^5(x+3)^3}\right|+C$$

END

狀況 2：重覆的線性因式

例題 3 積分

$$\int \frac{x-\frac{1}{2}}{(x-3)^2}\,dx$$

解：由法則 1，其中 $n=2$，可令

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{(x-3)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}$$ **重覆的線性因式**

將因式相加可得：

$$\frac{A}{x-3}\frac{x-3}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}=\frac{A(x-3)+B}{(x-3)^2}$$

分子相同，故

$$A(x-3)+B=x-\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{x=3:}\qquad A(0)+B=3-\frac{1}{2}$$ **代入 $x=3$**

$$B=\frac{5}{2}$$

由於有重覆的因式，$x=3$ 為唯一最方便代入的值。若我們將所得到的 B 值代入，再將 x 以任意值（例如令 $x=0$）代入：

$$A(x-3)+B=x-\frac{1}{2}$$

$$A(x-3)+\frac{5}{2}=x-\frac{1}{2} \qquad \mathbf{B=\frac{5}{2}}$$

$$\mathbf{x=0:} \qquad A(0-3)+\frac{5}{2}=0-\frac{1}{2}$$

$$-3A=-\frac{6}{2}$$

$$A=1$$

將 A,B 代入，可得：

$$\int\frac{x-\frac{1}{2}}{(x-3)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}+\frac{5}{2}\frac{1}{(x-3)^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{x-3}+\frac{5}{2}\int(x-3)^{-2}\,dx \qquad \begin{bmatrix} u=x-3 \\ du=dx \end{bmatrix}$$

$$=\ln|x-3|+\frac{5}{2}\frac{(x-3)^{-1}}{-1}+C$$

$$=\ln|x-3|-\frac{5}{2}\frac{1}{x-3}+C$$

END

例題4 積分

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 5x - 8}{(x-2)^2(x+3)}\,dx$$

解：被積分函數為假分式，應先利用長除法處理。(為了要利用長除法，須先將分母乘開。)

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \\ \cline{2-2} x^3 - x^2 - 8x + 12 & x^5 - x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 5x - 8 \\ & \underline{x^5 - x^4 - 8x^3 + 12x^2} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad 2x^2 - 5x - 8 \end{array}$$

被積分函數現在可寫成帶分式

$$x^2 + \frac{2x^2 - 5x - 8}{(x-2)^2(x+3)}$$

接下來需分解分式。由於分母僅包含線性因式：有重覆的因式 $x-2$ 及單一的因式 $x+3$。故由法則 1，可令

$$\frac{2x^2-5x-8}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+3}$$

將右式通分可得

$$\frac{A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2}{(x-2)^2(x+3)}$$

分子相等，故

$$A(x-2)(x+3)+B(x+3)+C(x-2)^2=2x^2-5x-8$$

$\boldsymbol{x=2}$**:** $\quad 0+5B+0=-10 \quad$ 得 $\quad B=-2$

$\boldsymbol{x=-3}$**:** $\quad 0+0+25C=25 \quad$ 得 $\quad C=1$

代入已求得的 B 及 C，得：

$$A(x-2)(x+3)-2(x+3)+1(x-2)^2=2x^2-5x-8$$

為了求 A，可令 x 為任意值，例如令 $x=0$：

$$\mathbf{x=0:}\qquad A(-2)(3)-2(3)+1(-2)^2=-8$$

得 $A=1$。

原積分式化為

$$\int\left(x^2+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\ln|x-2|+\frac{2}{x-2}+\ln|x+3|+C$$

END

狀況 3：不同的二次因式

例題 5 積分

$$\int \frac{3x^2+2x+4}{(x^2+4)(x+1)}\,dx$$

解：被積分函數的分母有一個二次因式，由法則 2（另外的線性因式 $x+1$，依然以法則 1 處理）。可令

$$\frac{3x^2+2x+4}{(x^2+4)(x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x+1}$$

在右式通分後，由左右兩式之分子相同，可得

$$(Ax+B)(x+1)+C(x^2+4)=3x^2+2x+4$$

x 以 -1 代入

$$\boldsymbol{x=-1:}\quad \begin{aligned} 0+C(1+4)&=3-2+4\\ 5C&=5\\ C&=1 \end{aligned}$$

解到此處，似乎找不到合適的值來代入。不管如何，在已求得的 C 代入之後，可令 $x=0$ 以求 B：

$$(Ax+B)(x+1)+1(x^2+4)=3x^2+2x+4 \qquad \mathbf{C=1}$$

$$\boldsymbol{x=0:} \qquad (0+B)(1)+1(4)=4$$

$$B=0$$

現在，我們有

$$(Ax)(x+1)+1(x^2+4)=3x^2+2x+4 \qquad \mathbf{B=0}$$

最後，可令 x 為任意值（例如，可令 $x=1$），以解 A：

$$\boldsymbol{x=1:} \qquad A(2)+5=9$$

$$A=2$$

在 A,B,C 代回之後，積分式可化為

$$\int\left(\frac{2x}{x^2+4}+\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln|x^2+4|+\ln|x+1|+C$$

$$=\ln|(x^2+4)(x+1)|+C$$

END

例題 6 積分

$$\int \frac{2x^2+10x+10}{x(x^2+4x+5)}\,dx$$

解：依法則 1 及法則 2，可令

$$\frac{2x^2+10x+10}{x(x^2+4x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$$

通分後，可知

$$A(x^2+4x+5)+(Bx+C)x=2x^2+10x+10$$

乘開，合併同次項可得

$$(A+B)x^2+(4A+C)x+5A=2x^2+10x+10$$

比較係數，可得下列聯立方程式

$$A+B=2 \qquad \boldsymbol{x^2}\text{ 項的係數}$$

$$4A+C=10 \qquad \boldsymbol{x}\text{ 項的係數}$$

$$5A=10 \qquad \text{常數項}$$

由最後一式，可得 $A=2$。代入第一式，得 $2+B=2$，故 $B=0$。
由第二式 $4(2)+C=10$，得 $C=2$。因此

$$\int\frac{2x^2+10x+10}{x(x^2+4x+5)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2+4x+5}\right)dx$$

$$=\int\frac{2}{x}\,dx+\int\frac{2}{(x+2)^2+1}\,dx$$

$$=2\ln|x|+2\,\text{Arctan}(x+2)+C$$

END

狀況 4：重覆的二次因式

例題 7 積分

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2}$$

解：由法則 2，可令

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

通分後比較分子可知

$$(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)=x^3$$

乘開，合併同次項可得

$$Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)=x^3$$

在此例中，以比較係數法，來求常係數特別容易：

$$A=1 \qquad B=0 \qquad A+C=0 \qquad B+D=0$$

因此 $C=-1$，且 $D=0$。故

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2} = \int\left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

令 $u=x^2+1$，則 $du=2x\,dx$。因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right)2x\,dx &= \frac{1}{2}\int(u^{-1}-u^{-2})\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|u| + \frac{1}{u}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C\end{aligned}$$

END

積分表積分法

例題 1 利用表 2 求積分

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5+2x}}$$

解：從積分表的第 2 小節（含 $\sqrt{a+bu}$ 之形式）可找到式 12 適合本題，只要令式 12 中的 $a=5, b=2$，即可得解：

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5+2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5+2x}-\sqrt{5}}{\sqrt{5+2x}+\sqrt{5}}\right| + C$$

END

例題 2 積分 $\int \sin 4x \cos 2x \, dx$。

解：在積分表中含三角函數形式的部分，可找到式 63 適合本題，令公式中的 $m=4, n=2$，可得

$$\int \sin 4x \cos 2x \, dx = -\frac{\cos(4+2)x}{2(4+2)} - \frac{\cos(4-2)x}{2(4-2)} + C$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

END

例題 3 積分 $\int \sec^4 x\,dx$ 。

解：式 71 適合本題，由於式 71 的右式仍含有積分，這種形式稱為遞迴公式。令公式中的 $n=4$ ，可得

$$\int \sec^4 x\,dx = \frac{\sec^2 x \tan x}{4-1} + \frac{4-2}{4-1}\int \sec^2 x\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\sec^2 x \tan x + \frac{2}{3}\tan x + C$$

其中 $\int \sec^2 x\,dx$ 可由積分表的式 53 或直接由經驗記憶可得。 END

例題 4 積分

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+4}}$$

解：先前已提過要利用積分表解題，首先必須找到完全適配的積分公式。令 $u^2=2x^2$，調整常數之後，式 34 適合本題。由於 $\boldsymbol{u=\sqrt{2}x}$, $\boldsymbol{du=\sqrt{2}\,dx}$，原題可改寫成

$$\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{2}x\sqrt{2x^2+4}}$$

如此，積分表中的式 34 即可完全適合本題：

$$\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{2}x\sqrt{2x^2+4}}=\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+\sqrt{u^2+a^2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x}{2+\sqrt{2x^2+4}}\right|+C$$

END