＊線性代數＊

矩陣

T. C. KUO

矩陣運算

定義　一個矩陣 (matrix) 為一個矩形的數字列陣，該些數字被稱作矩陣的元 (entries) 或元素 (elements)。

矩陣運算

- 一個矩陣的**規模**(size) 是對於矩陣的行數與列數的說明。一個有m 列n 行的矩陣，被稱為$m \times n$ 的矩陣。就上面給的例子，各矩陣的規模分別為2×2，2×3，1×4，3×3，1×1。一個1×m 的矩陣稱為**列矩陣**(row matrix) 或**列向量**(row vector)，一個n×1 矩陣被為**行矩陣**(column matrix) 或**行向量**(column vector)。

矩陣運算

- 我們運用雙下標符號來表示矩陣*A*裡面的元。矩陣*A*中第*i* 列第*j* 行的元用 a_{ij} 表示。意即，若

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}3 & 9 & -1\\0 & 5 & 4\end{bmatrix}}$$

則$a_{13}=-1$且$a_{22}=5$。

- 符號A_{ij}常會跟a_{ij}交替使用。因此，矩陣*A* 也會簡記為$[a_{ij}]$ 或 $[a_{ij}]_{m\times n}$ 。

矩陣運算

- 一般的*mxn*矩陣*A*形式如下

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩陣運算

- 若*A* 的行向量為向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$，則我們可將*A* 表示成

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}}$$

- 若*A* 的列向量為 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$，則我們可將*A* 表示成

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix}}$$

矩陣運算

- A 的**對角元**(diagonal entries) 為 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ ，且若 $m = n$，則A被稱為一個**方陣**(square matrix)。一個方陣若其非對角元皆為0，稱之為**對角矩陣**(diagonal matrix)。一個對角矩陣若其所有對角元都相同，稱之為**係數矩陣**(scalar matrix)。一個係數矩陣若其對角元都是1，稱之為**單位矩陣**(identity matrix)。

矩陣運算

- 例如令

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\text{及 } D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- *A* 的對角元為2與4，但*A* 不是方陣。*B* 是2x2 的方陣，對角元為3 和5；*C* 是對角矩陣；*D* 是3x3 的單位矩陣。一個*nxn*的單位矩陣又記為*In*，當已經知道其規模，也簡記為*I*。

矩陣運算

- 既然我們可將矩陣視為向量的一般化許多向量上的約定及運算也可以搬到矩陣上。
- 兩個矩陣若有相同的規模，且其相對應的元也都相等，則稱其為**相等(equal)**。設 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{r\times s}$，則$A=B$若且唯若$m=r$，$n=s$，且對所有的i、j都有$a_{ij}=b_{ij}$。

例

- 考慮矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{及} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & x \\ 5 & 3 & y \end{bmatrix}$$

A與B都不等於C。

例

- 考慮矩陣

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

儘管R與C有相同次序的元。因為R是1×3而C是3×1，所以$R \neq C$。

矩陣運算

[矩陣加法與係數積]

- 設 $A=[a_{ij}]$、$B=[b_{ij}]$都是$m\times n$矩陣，他們的和(sum) 也是由每個對應的元相加產生的$m\times n$矩陣。意即

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$$

例

- 令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ 及 } C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

則

$$\boxed{A + B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}}$$

但不管是$A+C$ 或$B+C$ 都無法被定義。

矩陣運算

- 設A 是$m \times n$矩陣，而c 是一常數，則係**數積** (scalar multiple) cA是將c 乘到A 中每一個元所產生的$m \times n$矩陣。更形式的說，我們有

$$cA = c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$$

例

- 對例3.3 的矩陣A 而言，

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -4 & 12 & 10 \end{bmatrix}, \ \tfrac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & 2 & 0 \\ -1 & 3 & \tfrac{5}{2} \end{bmatrix}, \text{ 及 } (-1)A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 2 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

- 矩陣(－1) A 可被寫成－A 並稱作負**A** (negative of A)。
- 差(difference)；若A、B 是兩個規模一樣的矩陣，則

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

例

- 對例3.3 的矩陣*A* 與*B* 而言，

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

- 其內元皆為零的矩陣便稱作**零矩陣**(zero matrix)，並記作 O (或 $O_{m\times n}$)

$$\boxed{A + O = A = O + A}$$

且

$$\boxed{A - A = O = -A + A}$$

矩陣運算

[矩陣的乘法]

定義　若 A 為一個 $m \times n$ 的矩陣，且 B 為一個 $n \times r$ 的矩陣，則乘積 (product) $C = AB$ 便為一個 $m \times r$ 的矩陣。

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

例

- 若

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 1\end{bmatrix} \text{ 及 } B=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 3 & -1\\ 5 & -2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

計算*AB*。

- 解：

由於*A* 為2x3，B 為3x4，則乘積*C*＝*AB* 成立且為一個2x4 矩陣。所以*C* 的第一列可由*A* 的第一列(向量) 依次跟*B* 的每一行(向量) 做點積而得，

例

$$c_{11} = 1(-4) + 3(5) + (-1)(-1) = 12$$
$$c_{12} = 1(0) + 3(-2) + (-1)(2) = -8$$
$$c_{13} = 1(3) + 3(-1) + (-1)(0) = 0$$
$$c_{14} = 1(-1) + 3(1) + (-1)(6) = -4$$

C 的第二列

$$c_{21} = (-2)(-4) + (-1)(5) + (1)(-1) = 2$$
$$c_{22} = (-2)(0) + (-1)(-2) + (1)(2) = 4$$
$$c_{23} = (-2)(3) + (-1)(-1) + (1)(0) = -5$$
$$c_{24} = (-2)(-1) + (-1)(1) + (1)(6) = 7$$

例

所以，便得到以下的矩陣乘積

$$\boxed{AB = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}}$$

例

- 考慮線性方程組

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 14 \end{aligned} \qquad (1)$$

觀察其等號左邊可寫成以下的矩陣乘積

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例

所以方程組(1) 可被寫成

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 14 \end{bmatrix}$$

或 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中A 為係數矩陣。

- 我們將不難發現每一個線性方程組都可以寫成 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的形式。事實上，矩陣方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 可以簡記為 $[A \mid \mathbf{b}]$，也就是線性方程組的增廣矩陣。

例

- 將此發現與定理2.4 結合，我們可看出，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解若且唯若**b**是*A* 行向量的線性組合。
- 關於矩陣運算還有另一個事實也可證明其為有用：令

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\0 & 5 & -1\end{bmatrix}$$ 且考慮乘積 $A\mathbf{e}_3$ 與 $\mathbf{e}_2A$，其中

$\mathbf{e}_3$ 與 $\mathbf{e}_2$ 為使乘積有意義的單位向量。因此

例

$$A\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ 及 } \mathbf{e}_2 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

- 注意，$A\mathrm{e}_3$ 即為*A* 的第三行，而 $\mathrm{e}_2 A$則為*A* 的第二列。以下定理則為一般的結果。

矩陣運算

定理3.1

令 A 為一個 $m \times n$ 矩陣，$\mathbf{e}_i$ 為一個 $1 \times m$ 的標準單位矩陣，且 $\mathbf{e}_j$ 為一個 $n \times 1$ 的標準單位矩陣。則

a. $\mathbf{e}_i A$ 為 A 的第 i 列，而

b. $A\mathbf{e}_j$ 則為 A 的第 j 行。

矩陣運算

[分區矩陣]

- 若將一矩陣看成是由一連串較小的**子矩陣** (submatrices) 構成的話，有時會比較方便。例如，考慮矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

矩陣運算

- 其看似就是自然的將*A* 作如下瓜分

$$\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 2\end{array}\right] = \begin{bmatrix} I & B \\ O & C \end{bmatrix}$$

- 其中*I* 為3x3 的基本矩陣，*B* 為3x2，*O* 則為2x3 的零矩陣，還有C 為2x2 的矩陣。

矩陣運算

- 假定A 為一個$m \times n$矩陣，B 為一個 $n \times r$矩陣，則乘積AB 便存在。若我們將B 以行向量形式進行分區：$B = [\mathbf{b}_1 \vdots \mathbf{b}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{b}_r]$，則

$$\boxed{AB = A[\mathbf{b}_1 \vdots \mathbf{b}_2 \vdots \cdots \vdots \mathbf{b}_r] = [A\mathbf{b}_1 \vdots A\mathbf{b}_2 \vdots \cdots \vdots A\mathbf{b}_r]}$$

- 此結果便是矩陣乘積的定義。而等號右邊稱為乘積的**矩陣-行表現**(matrix-column representation)

例

- 若

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \text{ 及 } B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

則

$$A\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\ 2\end{bmatrix} \text{ 且 } A\mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix}$$

所以

$$AB=[A\mathbf{b}_1 \vdots A\mathbf{b}_2]=\begin{bmatrix}13 & \vdots & 5\\ 2 & \vdots & -2\end{bmatrix}$$

矩陣運算

附註

- 假定A 為一個 $m \times n$ 矩陣，B 為一個 $n \times r$ 矩陣，則乘積AB 存在。若我們將A 用列向量分區成如下形式:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \hdashline \mathbf{A}_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{A}_m \end{bmatrix}}$$

則

$$\boxed{AB = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \hdashline \mathbf{A}_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{A}_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 B \\ \hdashline \mathbf{A}_2 B \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{A}_m B \end{bmatrix}}$$

矩陣運算

- 再一次，此結果為矩陣乘積定義的直接結果。而等號右邊稱為**乘積的列－矩陣表現** (row-matrix representation)。

矩陣運算

[矩陣冪次]

- 當*A* 與*B* 為兩個$n \times n$矩陣，其乘積*AB* 也將為一個$n \times n$矩陣。當$A = B$時，很自然的定義$A^2 = AA$，而定義 A^k

$$\boxed{A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k\text{ factors}}}$$

- 若 k 為一個正整數。因此，$A^1 = A$，且其方便去定義 $A^0 = I_n$。

3.1 矩陣運算

若 A 為一個方陣，且 r 與 s 為非負整數，則

1. $A^r A^s = A^{r+s}$
2. $(A^r)^s = A^{rs}$

例

- (a) 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，則

$$\boxed{A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}}$$

且一般來說，

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix} \text{對所有 } n \geq 1$$

例

$n=1$

$$\boxed{A^1=\begin{bmatrix}2^{1-1} & 2^{1-1}\\ 2^{1-1} & 2^{1-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^0 & 2^0\\ 2^0 & 2^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=A}$$

即為所求。

例

歸納假設假定對某整數 $k \geq 1$,

$$\boxed{A^k = \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix}}$$

歸納步驟在證明對 $n = k + 1$，此式成立。利用矩陣冪次的定義及歸納假設，有

例

$$
\begin{aligned}
A^{k+1} = A^kA &= \begin{bmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} \\ 2^{k-1} & 2^{k-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{k-1}+2^{k-1} & 2^{k-1}+2^{k-1} \\ 2^{k-1}+2^{k-1} & 2^{k-1}+2^{k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{k} & 2^{k} \\ 2^{k} & 2^{k} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{(k+1)-1} & 2^{(k+1)-1} \\ 2^{(k+1)-1} & 2^{(k+1)-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

所以，依據數學歸納法原理，對所有$n \geq 1$，公式成立。

例

(b) 若 $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，則 $B^2=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

接下來我們得到

$$\boxed{B^3=B^2B=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}}$$

及

$$\boxed{B^4=B^3B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$

例

所以 $B^5 = B$，也就是B 的冪次結果是重複每4 次一循環。

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \cdots}$$

矩陣運算

[一個矩陣的轉置]

定義 一個 $m \times \mathbf{n}$ 矩陣 A 的轉置 (transpose) 為經由將 A 的列與行對調而得的 $n \times m$ 矩陣 A^T.

例

- 令

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\quad \text{及}\quad C=\begin{bmatrix}5 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

則其轉置為

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix},\quad B^T=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix},\quad \text{及}\quad C^T=\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$$

矩陣運算

- 轉置也被用以定義一種重要的方陣：對稱矩陣。

定義　一個方陣 A 若有 $A^T = A$—也就是 A 與其轉置相等, 則稱 A 為**對稱** (symmetric)。

例

- 令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ 及 } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

則*A* 為對稱，因為 $A^T = A$ 。但*B* 並非對稱，因為 *B* 。

例

- 一個對稱矩陣的逐項定義也是有用的。它是鏡像性質的代數描述。

一個方陣 A 為對稱的充要條件是對所有 i 與 j，$A_{ij}=A_{ji}$。

矩陣代數

定理3.2

矩陣加法與係數積的代數性質

令 A，B 與 C 為規模相等的矩陣，並令 c 與 d 為係數。則

a.	$A + B = B + A$	交換
b.	$(A + B) + C = A + (B + C)$	結合
c.	$A + O = A$	
d.	$A + (-A) = O$	
e.	$c(A + B) = cA + cB$	分配
f.	$(c + d)A = cA + dA$	分配
g.	$c(dA) = (cd)A$	
h.	$1A = A$	

矩陣代數

- 若 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 為相同規模的矩陣，且 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ 為係數，我們可造出以下的**線性組合**(linear combination)

$$\boxed{c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k}$$

- 我們可將指為線性組合的係數(coefficients)。

例

- 令 $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 及 $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。

(a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$是否為$A_1$, A_2 及A_3 的一個線性組合？

(b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$是否為$A_1$, A_2 及 A_3的一個線性組合？

例

- 解：

(a) 我們要去找出使得 $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = B$ 的係數 c_1, c_2, c_3 ，所以

$$\boxed{c_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$$

此方程式的左邊可被重寫為

$$\boxed{\begin{bmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + c_3 \\ -c_1 + c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}}$$

例

比較各元，並運用矩陣等式的定義，我們得到4 個線性方程式

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 1 \\ c_1 \quad\;\; + c_3 &= 4 \\ -c_1 \quad\;\; + c_3 &= 2 \\ c_2 + c_3 &= 1 \end{aligned}$$

運用Gauss－Jordan 消去法可得到

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

例

(驗算之！) 所以 $c_1=1, c_2=-2$ 且 $c_3=3$ 。因此， $A_1-2A_2+3A_3=B$，其可容易被驗證。

(b) 這裡我們要解

$$c_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

同(a) 之程序，我們得到線性方程組

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 &= 1 \\ c_1 \qquad + c_3 &= 2 \\ -c_1 \qquad + c_3 &= 3 \\ c_2 + c_3 &= 4 \end{aligned}$$

例

經由列運算再得到

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

所以，在此例中，C 不為 A_1, A_2 與 A_3 的線性組合。

例

- 描述例3.16 中矩陣 A_1, A_2 與 A_3的延展。

▶ 解：一個方法就是寫出 A_1, A_2 與A_3 的一個一般線性組合。因此，

$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = c_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + c_3 \\ -c_1 + c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$$

例

(類似一平面的參數式)。但假定我們想知道何時矩陣 $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ 在展延 (A_1, A_2, A_3) 中。當對某些係數

$c_1, c_2, c_3,$

$$\boxed{\begin{bmatrix} c_2 + c_3 & c_1 + c_3 \\ -c_1 + c_3 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}}$$

例

- 可得到一個線性方程組，且其左手邊就同例 3.16。此方程組的增廣矩陣為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & w \\ 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right]$$

且列運算得到

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & w \\ 1 & 0 & 1 & x \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + w \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 & w - z \end{array}\right]$$

例

(小心驗算。) 所以，A_1, A_2 與 A_3 的展延由所有矩陣 $\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ 組成，其中 $w=z$。也就是說，

$$\boxed{\operatorname{span}(A_1, A_2, A_3) = \left\{ \begin{bmatrix} w & x \\ y & w \end{bmatrix} \right\}}$$

矩陣代數

附註

- 線性獨立對矩陣也有意義。我們可說相同規模的矩陣 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 為**線性獨立**(linear independent)，只要方程式

$$\boxed{c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k = O}$$

有唯一解，且該唯一解為無聊解 $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$，若存在非無聊的係數滿足方程式(1) ，則 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 便稱作**線性相依**(lineardependent)。

例

- 考慮矩陣

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix} \text{ 及 } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

相乘可得到

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 4\\ -3 & -2\end{bmatrix} \text{ 且 } BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

例

- 因此$AB \neq BA$。和實數的乘法不同的是，矩陣的乘法並不能交換，兩個矩陣的先後順序可能影響答案。

可容易驗證 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$(作看看！)

矩陣代數

定理3.3

矩陣乘法的性質

令 A, B 與 C 為矩陣 (且其規模皆可表現出以下性質)，並令 k 為一係數。則

a. $A(BC) = (AB)C$ 結合
b. $A(B + C) = AB + AC$ 左分配
c. $(A + B)C = AC + BC$ 右分配
d. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
e. $I_m A = A = AI_n$ 若 A 為 $m \times n$ 乘法單位元

例

- 若A與B為相同規模的方陣，則是否

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2?$$

- 解：

運用矩陣乘法的性質，我們計算

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) & \\ &= (A+B)A + (A+B)B & \text{根據左分配律} \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 & \text{根據右分配律}\end{aligned}$$

例

所以，$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$的充要條件為$A^2+BA+AB+B^2=A^2+2AB+B^2$。從方程式兩邊減去$A^2$與$B^2$，得到$BA+AB=2AB$。再從方程式兩邊減去$AB$，得到$BA=AB$。所以，$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$的充要條件為$A$與$B$可交換。

定理3.4

轉置的性質

令 A 與 B 為矩陣 (且其規模皆可表現出以下性質)，並令 k 為一係數。則

a. $(A^T)^T = A$

b. $(A + B)^T = A^T + B^T$

c. $(kA)^T = k(A^T)$

d. $(AB)^T = B^T A^T$

e. $(A^r)^T = (A^T)^r$ 對所有非負整數 r

矩陣代數

- 我們將一個矩陣X的第i 列記作rowi(X), 將其第j 行記作colj(X).運用這些推論，我們得到

$$\boxed{\begin{aligned}[(AB)^T]_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= \mathrm{row}_j(A)\cdot \mathrm{col}_i(B) \\ &= \mathrm{col}_j(A^T)\cdot \mathrm{row}_i(B^T) \\ &= \mathrm{row}_i(B^T)\cdot \mathrm{col}_j(A^T) = [B^TA^T]_{ij}\end{aligned}}$$

(注意，我們運用到了矩陣乘法、轉置的定義，以及點積為可交換的性質。)因為*i* 與*j* 為任意選取，所以由此結果便可推論到$(AB)^T = B^TA^T$ 。

例

- 令

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{及} \quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}}$$

則 $A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，所以，$A+A^T=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}$為一個對稱矩陣。

例3.21

- 我們得到

$$B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B^TB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- 因此，BB^T與B^TB皆為對稱，即使B並非方陣！(讀者可驗證AA^T與A^TA也皆對稱。)

定理3.5

a. 若 A 為方陣，則 $A+A^T$ 便為一個對稱矩陣。

b. 對任意矩陣 A，AA^T 與 A^TA 為對稱矩陣。

一個矩陣的逆反

定義　若 A 為一個 $n \times n$ 矩陣，則 A 的一個反矩陣 (inverse) 為一個 $n \times n$ 矩陣 A', 同時

$$AA' = I \text{ 且 } A'A = I$$

其中 $I = I_n$ 為 $n \times n$ 的單位矩陣。若這樣的 A' 存在，則 A 便稱作可逆的 (invertible)。

例

- 若 $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, 則 $A'=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$為$A$的一個反矩陣，因為

$$\boxed{AA'=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ 且 } A'A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$

一個矩陣的逆反

定理3.6

任一個可逆矩陣 A 皆僅有唯一個反矩陣。

定理3.7

若 A 為一可逆的 $n \times n$ 矩陣，則線性方程組 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{b}$ 屬於 $\mathbb{R}^n$。

一個矩陣的逆反

定理3.8

若 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則當 $ad-bc\neq 0$，A 為可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

若 $ad-bc=0$，則 A 不可逆。

例

- 若 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 與 $B=\begin{bmatrix}12 & -15\\ 4 & -5\end{bmatrix}$ 的反矩陣存在，請找出它們。
- 解：

  我們得到det A=1(4)－2(3)=-2≠0，所以A為可逆，且
  $$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

  (證明此。)

  另一方面，det B=12(5)－(-15)(4)=0，所以B不為可逆。

例

- 運用係數矩陣的反矩陣來解線性方程組

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 3x + 4y &= -2 \end{aligned}$$

- 解：

係數矩陣為矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，其反矩陣我們在例3.24已計算。依據定理3.7，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$有唯一解 $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$。此處我們有 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$; 因此所給定之方程組的解為

$$\boxed{\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ \frac{11}{2} \end{bmatrix}}$$

一個矩陣的逆反

定理3.9

a. 若 A 為一可逆矩陣，則 A^{-1} 為可逆且

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b. 若 A 為一可逆矩陣，且 c 為一非零係數，則 cA 為一個可逆矩陣且

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$$

c. 若 A 與 B 為相同規模的可逆矩陣，則 AB 為可逆且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

d. 若 A 為一可逆矩陣，則 A^T 為可逆且

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

e. 若 A 為一可逆矩陣，則 A^n 為可逆，其中 n 為任意非零整數，且

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

一個矩陣的逆反

一個可逆矩陣們的乘積的反矩陣即為其反矩陣們以反向順序相乘的乘積。

若 A 為一個可逆矩陣且 n 為一個正整數，則 A^{-n} 被定義如下

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

- 由此定義，可驗證指數律：$A^rA^s=A^{r+s}$ 與 $(A^r)^s=A^{rs}$，其中r與s為整數，A為可逆矩陣。

例

- 解以下X的矩陣方程式：

$$A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^{3})^{2}$$

- 解：

有許多方法可解。其中一個解法是

$$\begin{aligned}
A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^{3})^{2} &\Rightarrow ((BX)A)^{-1} = (A^{-1}B^{3})^{2} \\
&\Rightarrow [((BX)A)^{-1}]^{-1} = [(A^{-1}B^{3})^{2}]^{-1} \\
&\Rightarrow (BX)A = [(A^{-1}B^{3})(A^{-1}B^{3})]^{-1} \\
&\Rightarrow (BX)A = B^{-3}(A^{-1})^{-1}B^{-3}(A^{-1})^{-1} \\
&\Rightarrow BXA = B^{-3}AB^{-3}A \\
&\Rightarrow B^{-1}BXAA^{-1} = B^{-1}B^{-3}AB^{-3}AA^{-1}
\end{aligned}$$

一個矩陣的逆反

定義　一個基本矩陣 (elementary matrix) 為一個能被顯示成在一單位矩陣上的基本列運算的矩陣。

例

- 令

$$E_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \text{且}\ E_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-2&0&1\end{bmatrix}$$

這些矩陣中每一個每一個可被表成一種在單位矩陣I_4上作單一基本運算。矩陣E_1對應到$3R_2$，E_2對應到$R_1 \longleftrightarrow R_3$，而$E_3$對應到$R_4 - R_2$。對一個$4 \times n$矩陣左乘上以上的一個單位矩陣，我們可以觀察到對應的列算也作用到那個矩陣上。

一個矩陣的逆反

定理3.10

令 E 為可被表成在 I_n 上一個基本列運算的矩陣。若相同的基本列運算運用在一個 $n \times r$ 矩陣 A，則結果同矩陣 EA。

例

- 令

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ 且\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

則E_1對應到$R_2 \longleftrightarrow R_3$, 若再作一次$R_2 \longleftrightarrow R_3$便又回復。所以，$E_1^{-1} = E_1$。(用$E_1^2 = E_1E_1 = I$來驗算。) 由$4R_2$可得矩陣$E_2$，而將其表成$1/4R_2$，便又可回復原狀。則

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例

- 可容易驗證。最後，

$$\boxed{E_3^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}}$$

(再一次，其可容易驗證將此矩陣不管是右乘還是左乘上E_3，結果都是單位矩陣I。)

一個矩陣的逆反

定理3.12

可逆矩陣基本定理：第一版

令 A 為一個 $n \times n$ 矩陣，以下的敘述皆為等價：

a. A 為可逆。

b. 對 $\mathbb{R}^n$ 中每一個 $\mathbf{b}$，$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有唯一解。

c. $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 只有無聊解。

d. A 的化簡列階式為 I_n。

e. A 為基本矩陣的一個乘積。

例

- 若可行的話，將 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 3\end{bmatrix}$表示成基本矩陣的一個乘積。

▸ 解：

將A作列運算如下：

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

例

- 所以，*A* 的化簡列階式為單位矩陣，

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

為對應到將*A*化簡至*I*的四個基本列運算的基本矩陣。如同定理證明中所作的，我們得到

$$A = (E_4E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

即為所求。

一個矩陣的逆反

定理3.13

令 A 為一個方陣。若 B 也為方陣，且若非 $AB=I$ 便是 $BA=I$，則 A 為可逆，且 $B=A^{-1}$。

定理3.14

令 A 為一個方陣。若運用一連串的基本列運算可將 A 化簡至 I，則相同的一連串基本列運算也可將 I 轉換為 A^{-1}.

例

- 找出

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

的反矩陣，若其存在的話。

- 解：

運用Gauss-Jordan消去法得到

$$\boxed{[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

例

$$\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{2})R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2+3R_3]{R_1+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 9 & -\frac{3}{2} & -5\\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1\end{array}\right]$$

例

- 所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 9 & -\frac{3}{2} & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

(讀者每一次都應直接運算證實$AA^{-1}=I$。但依據定理3.13，當確認$AA^{-1}=I$後，我們不必再確認$A^{-1}A=I$。)

LU分解

定義 令 A 為一個方陣 A 的一個矩陣分解 $A=LU$，其中 L 是單位下三角矩陣，U 為上三角矩陣，則稱為 A 的 LU 分解。

定理3.15

若 A 為一個方陣且不需要列交換就可以被化成列階式，則 A 有 LU 分解。

例

- 運用 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ 的 LU 分解來解 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，其中 $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$。

例

- 解：

$$\boxed{A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&3\\0&-3&-3\\0&0&2\end{bmatrix}=LU}$$

如上所述，為解$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$(如同$L(U\mathbf{x})=\mathbf{b}$)，我們首先解$L\mathbf{y}=\mathbf{b}$，其中$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$。此即為線性方程組

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & & & & & = & 1\\ 2y_1 & + & y_2 & & & = & -4\\ -y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & = & 9\end{array}}$$

例

- 向前代換(意即，從上到下運算)可得到

$$\boxed{y_1 = 1,\ y_2 = -4 - 2y_1 = -6,\ y_3 = 9 + y_1 + 2y_2 = -2}$$

因此，$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}$ 且 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ -3x_2 - 3x_3 &= -6 \\ 2x_3 &= -2 \end{aligned}}$$

例

- 同時向後代換可很快得到

$$x_3 = -1,$$
$$-3x_2 = -6 + 3x_3 = -9 \text{ 因此 } x_2 = 3 \text{ 及}$$
$$2x_1 = 1 - x_2 - 3x_3 = 1 \text{ 因此 } x_1 = \tfrac{1}{2}$$

所以，所給定的 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 方程組解為 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$。

例

- 找出

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & 8 & -10 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ -9 & 5 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

的LU分解。

LU分解

定理3.16

若 A 為一個可逆矩陣，且有 LU 分解，則其 L 與 U 為唯一。

定理3.17

若 P 為一個排列矩陣，則 $P^{-1}=P^T$。

LU分解

定義 令 A 為一個方陣。A 的分解 $A = P^T LU$ 稱為 A 的 $P^T LU$ 分解，其中 P 是置換矩陣，L 是單位下三角矩陣，U 是上三角矩陣。

例

- 找出 $A=\begin{bmatrix}0&0&6\\1&2&3\\2&1&4\end{bmatrix}$ 的一個P^TLU分解。

- 解：首先我們將A化簡為列階式。

$$A=\begin{bmatrix}0&0&6\\1&2&3\\2&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&6\\2&1&4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-2R_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&6\\0&-3&-2\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-2\\0&0&6\end{bmatrix}$$

例

- 我們已運用列交換

$$P = P_2P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

我們現在要找出*PA*的*LU*分解。

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = U$$

因此$L_{21}=2$，且所以

$$A = P^TLU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

LU分解

定理3.18

每一個方陣皆可被 P^TLU 分解。

定義 $\mathbb{R}^n$ 中的一個子空間 (subspace) 為 $\mathbb{R}^n$ 中向量的任意聚集 S，且 S 符合以下性質：

1. 零向量 $\mathbf{0}$ 在 S 中。
2. 若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 在 S 中，則 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 也在 S 中。（S 具有加法封閉性）
3. 若 $\mathbf{u}$ 在 S 中且 c 為一個係數，則 $c\mathbf{u}$ 也在 S 中。（S 具有係數積封閉性）