系統的數學描述

1. 轉移函數(transfer function):連續系統，拉氏轉換(Laplace transform)
2. 狀態空間表示式(state space):連續系統，線性代數(Linear algebra)
3. z 轉換(z transform):離散系統

轉移函數

考慮一個線性非時變系統，其輸入為$r(t)$，而輸出為$c(t)$，系統的特性可以用脈衝響應$g(t)$來表示，脈衝響應的定義為當輸入為單位脈衝函數$\delta(t)$時的系統輸出行為。一旦線性系統的脈衝響應為已知，則系統的輸出$c(t)$可利用轉移函數運算來求得。

若一線性非時變系統的轉移函數定義為脈衝響應的拉氏轉換，而其所有初始條件皆設為零，以$G(s)$表示系統的轉移函數，則$G(s)$定義為

$$G(s) = L[g(t)]$$

轉移函數$G(s)$與輸入—輸出的拉氏轉換有下列關係：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

所有的初始值皆設為零，且$C(s)$和$R(s)$則分別為$c(t)$和$r(t)$的拉氏轉換。

拉氏轉換重要定理

1. **拉氏轉換定義**：時間函數$f(t)$的拉氏轉換可定義為

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

變數s稱為拉氏轉換子(Laplace operator)，是一個複變數，即$s = \sigma + j\omega$。

2. 微分定理：

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{d^2 t}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

3.　積分定理

$$L\left[\int_o^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(s)}{s}$$

$$L\left[\int_0^t\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau dt_1\right]=\frac{F(s)}{s^2}$$

$$\vdots$$

$$L\left[\int_0^{t_n}\int_0^{t_{n-1}}\cdots\int_0^{t_1} f(\tau)d\tau dt_1 dt_2\cdots dt_{n-1}\right]=\frac{F(s)}{s^n}$$

4.　初值定理

$$f(0)=\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$$

5.　終值定理

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}sF(s)$$

線性代數

反矩陣：若矩陣 A 的反矩陣為 A^{-1}，則

1. A 必須為 $n\times n$ 方矩陣
2. $AA^{-1}=I_n$，I_n 為 $n\times n$ 單位矩陣，即 I_n 的主對角線元素為 1，其餘元素為 0
3. $A^{-1}=\dfrac{adj\ A}{|A|}$，其中 $adj\ A$ 稱為伴隨矩陣，$|A|=\det(A)$ 為行列式

$$adj\ A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$，A_{ij} 稱為餘因子，$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$，$M_{ij}$ 爲 A 矩陣扣掉第 i 列第 j 行後的矩陣

若 n=1，即 $A=[a_{11}]$，則 $|A|=a_{11}$

若 n=2，即 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，則 $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

若 n=3，即 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，則 $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

當 $n\geq 4$，則 $|A|=\det(A)=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$（以第 i 列展開）

或 $|A|=\det(A)=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{1j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$（以第 j 行展開）

例：

已知一矩陣為 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，試求其反矩陣 A^{-1}。

解：

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix} a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & -(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32}) & a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22} \\ -(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) & a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31} & -(a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}) \\ a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & -(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31}) & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{bmatrix}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

例：

已知一矩陣為 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 10 & 16 \\ 3 & 20 & 42 \end{bmatrix}$，試求其反矩陣 A^{-1}。

解：

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}$$

$$|A|=1\times10\times42+4\times16\times3+5\times2\times20-5\times10\times3-4\times2\times42-1\times16\times20=6$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 10 & 16 \\ 20 & 42 \end{vmatrix}=100,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 42 \end{vmatrix}=-36,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}=10$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 20 & 42 \end{vmatrix}=-68,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 42 \end{vmatrix}=27,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}=-8$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 10 & 16\end{vmatrix}=14,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 16\end{vmatrix}=-6,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 10\end{vmatrix}=2$$

$$adj\ A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100 & -68 & 14\\ -36 & 27 & -6\\ 10 & -8 & 2\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{adj\ A}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}100 & -68 & 14\\ -36 & 27 & -6\\ 10 & -8 & 2\end{bmatrix}}{6}$$

MATLAB指令：行列式det(A)

反矩陣inv(A)

轉移函數(transfer function)到狀態空間(state space)的轉換

1. 相位變數型式(phase variable form)

要把轉移函數轉換成狀態空間表示法時，首先是把轉移函數交叉相乘，並假設在零初始值下求出反拉氏轉換，以求解微分方程式，然後再用相位變數(phase variable)型式表示狀態空間的微分方程式。

考慮如下的轉移函數

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0} \tag{1}$$

將(1)式等號兩邊交叉相乘，則

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)Y(s)=b_0U(s) \tag{2}$$

取反拉氏轉換後可得

$$\frac{d^ny(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+a_{n-2}\frac{d^{n-2}y(t)}{dt^{n-2}}+\cdots+a_1\frac{dy(t)}{dt}$$
$$+a_0y(t)=b_0u(t) \tag{3}$$

其中 $y(t)$ 為輸出變數，$u(t)$ 為輸入變數。

以下說明如何使用相位變數的方法將一個 n 階常係數微分方程式來轉換成狀態空間表示法。首先選定一組狀態變數稱為相位變數。一個簡便的方法是選擇輸出 $y(t)$ 和它的

一次微分項到$(n-1)$個微分項為狀態變數，以$x_i(t)$表示狀態變數，可得

$$x_1(t)=y(t) \tag{4a}$$

$$x_2(t)=\frac{dy(t)}{dt} \tag{4b}$$

$$x_3(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2} \tag{4c}$$

$$\vdots$$

$$x_n(t)=\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} \tag{4d}$$

將(4a)式到(4d)式的兩邊微分，可得

$$\dot{x}_1(t)=\frac{dy(t)}{dt} \tag{5a}$$

$$\dot{x}_2(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2} \tag{5b}$$

$$\dot{x}_3(t)=\frac{d^3y(t)}{dt^3} \tag{5c}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t)=\frac{d^ny(t)}{dt^n} \tag{5d}$$

將(4)式的定義代入(5)式，則狀態方程式如下

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t) \tag{6a}$$

$$\dot{x}_2(t)=x_3(t) \tag{6b}$$

$$\dot{x}_3(t)=x_4(t) \tag{6c}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t)=-a_0x_1(t)-a_1x_2(t)-\cdots-a_{n-1}x_n(t)+b_0u(t) \tag{6d}$$

所以(6)式的向量矩陣型式如下

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}(t)\\ \dot{x}_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&&&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\ \vdots\\x_{n-1}(t)\\x_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\b_0\end{bmatrix}u(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}=Ax+Bu \tag{7}$$

(7)式為一個相位變數型式的狀態方程式，其中每一列是只有一個 1 和其餘為 0 的組合，而最後一列則由原先微分方程式的係數構成。

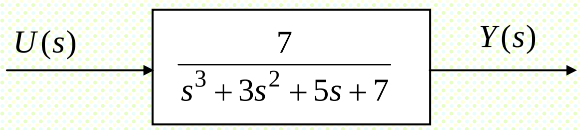
因為微分方程式的解是 $y(t)$，又等於 $x_1(t)$，所以輸出方程式為

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ \vdots \\ x_{n-1}(t)\\ x_n(t)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y = Cx + Du \tag{8}$$

例題

求出下圖中轉移函數的狀態空間表示式，以相位變數型式處理。



解：

步驟一：求出組成的微分方程式

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{7}{s^3+3s^2+5s+7} \tag{9}$$

交叉相乘得

$$(s^3+3s^2+5s+7)Y(s)=7U(s) \tag{10}$$

在假設零初始值下求出(10)式的反拉氏轉換得

$$\dddot{y}+3\ddot{y}+5\dot{y}+7y=7u \tag{11}$$

步驟二：選定狀態變數

以連續的導函數為狀態變數可得

$$x_1 = y \tag{12a}$$

$$x_2 = \dot{y} \tag{12b}$$

$$x_3 = \ddot{y} \tag{12c}$$

因為輸出為 $y = x_1$，將(12)式所定義的狀態變數代入(11)式，且 $\dddot{y}=\dot{x}_3$，則狀態和輸出方程式為

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{13a}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{13b}$$

$$\dot{x}_3 = -7x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 7u \tag{13c}$$

$$y = x_1 \tag{13d}$$

其向量矩陣型式為

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -7 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} u \tag{14a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{14b}$$

MATLAB指令：[A,B,C,D]=tf2ss(num,den)

2. 可控典型式(Controllable canonical form)

若轉移函數為

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{15}$$

令轉移函數為

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \times \frac{N(s)}{N(s)} \tag{16}$$

其中 $N(s)$ 稱為輔助狀態(auxiliary state)或部分狀態(partial state) 。

現在令

$$Y(s) = (b_1 s + b_0) N(s) \tag{17}$$

$$U(s) = (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) N(s) \tag{18}$$

對(17)與(18)取反拉氏轉換

$$y(t) = b_1 \dot{n}(t) + b_0 n(t) \tag{19}$$

$$u(t) = n^{(n)} + a_{n-1} n^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \dot{n}(t) + a_0 n(t) \tag{20}$$

令狀態

$$x_1(t) = n(t) \tag{21a}$$

$$x_2(t) = \dot{n}(t) \tag{21b}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1}(t) = n^{(n-2)}(t) \tag{21c}$$

$$x_n(t) = n^{(n-1)}(t) \tag{21d}$$

將(21a)式到(21d)式的兩邊微分，可得

$$\dot{x}_1(t) = \dot{n}(t) \tag{22a}$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{n}(t) \tag{22b}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = n^{(n-1)}(t) \tag{22c}$$

$$\dot{x}_n(t) = n^{(n)}(t) \tag{22d}$$

將(21a)-(21d)代入(22a)-(22d)，可得

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{23a}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t) \tag{23b}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \tag{23c}$$

$$\dot{x}_n(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \cdots - a_{n-1} x_n(t) + u(t) \tag{23d}$$

可將(23a)-(23d)整理成矩陣型式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{24}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu \tag{25}$$

將(21a)-(21b)代入(19)式，可得

$$y(t) = b_1 x_2(t) + b_0 x_1(t)$$

$$= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\Rightarrow y = Cx + Du \tag{27}$$

例題

將轉移函數 $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s-1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$ 轉換成可控典型式的狀態空間表示式。

解：

步驟一：令轉移函數為

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s-1}{s^3+3s^2+2s}\times\frac{N(s)}{N(s)} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow Y(s)=(s-1)N(s)\\ &\quad U(s)=(s^3+3s^2+2s)N(s)\end{aligned} \tag{29}$$

在假設零初始值下求出(27)式的反拉氏轉換得

$$\begin{cases} y=\dot{n}-n \\ u=\dddot{n}+3\ddot{n}+2\dot{n}\end{cases} \tag{30}$$

步驟二：選定狀態變數

以連續的導函數為狀態變數可得

$$x_1=n \tag{31a}$$

$$x_2=\dot{n} \tag{31b}$$

$$x_3=\ddot{n} \tag{31c}$$

對(31)式兩邊微分

$$\dot{x}_1=\dot{n} \tag{32a}$$

$$\dot{x}_2=\ddot{n} \tag{32b}$$

$$\dot{x}_3=\dddot{n}=-2\dot{n}-3\ddot{n}+u \tag{32c}$$

$$y=-n+\dot{n} \tag{32d}$$

將(31)式代入(32) 式

$$\dot{x}_1=x_2 \tag{33a}$$

$$\dot{x}_2=x_3 \tag{33b}$$

$$\dot{x}_3=-2x_2-3x_3+u \tag{33c}$$

$$y=-x_1+x_2 \tag{33d}$$

其向量矩陣型式為

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u \tag{34a}$$

$$y=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \tag{34b}$$

3. 可觀典型式(Observable canonical form)

若轉移函數為

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

$$\Rightarrow (s^3+a_2s^2+a_1s+a_0)Y(s)=(b_1s+b_0)U(s)$$

$$\Rightarrow s^3Y(s)+a_2s^2Y(s)+s(a_1Y(s)-b_1U(s))+(a_0Y(s)-b_0U(s))=0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Y(s)&=-\frac{1}{s}a_2Y(s)+\frac{1}{s^2}(b_1U(s)-a_1Y(s))+\frac{1}{s^3}(b_0U(s)-a_0Y(s))\\&=\frac{1}{s}\left[-a_2Y(s)+\frac{1}{s}\left((b_1U(s)-a_1Y(s))+\frac{1}{s}(b_0U(s)-a_0Y(s))\right)\right]\end{aligned} \tag{35}$$

令狀態

$$X_1(s)=\frac{1}{s}(b_0U(s)-a_0Y(s)) \tag{36a}$$

$$\begin{aligned}X_2(s)&=\frac{1}{s}\left((b_1U(s)-a_1Y(s))+\frac{1}{s}(b_0U(s)-a_0Y(s))\right)\\&=\frac{1}{s}\left((b_1U(s)-a_1Y(s))+X_1(s)\right)\end{aligned} \tag{36b}$$

$$\begin{aligned}X_3(s)&=\frac{1}{s}\left[-a_2Y(s)+\frac{1}{s}\left((b_1U(s)-a_1Y(s))+\frac{1}{s}(b_0U(s)-a_0Y(s))\right)\right]\\&=\frac{1}{s}\left[-a_2Y(s)+X_2(s)\right]\end{aligned} \tag{36c}$$

則

$$Y(s)=X_3(s) \tag{37}$$

將(36a)式到(36d)式可改寫為

$$sX_1(s)=b_0U(s)-a_0Y(s) \tag{38a}$$

$$sX_2(s)=b_1U(s)-a_1Y(s)+X_1(s) \tag{38b}$$

$$sX_3(s)=-a_2Y(s)+X_2(s) \tag{38c}$$

對(37)式,(38a)式-(38c)式的取反拉氏轉換，可得

$$y(t)=x_3(t) \tag{39a}$$

$$\dot{x}_1(t)=-a_0x_3+b_0u \tag{39b}$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1 - a_1 x_3 + b_1 u \tag{39c}$$

$$\dot{x}_3(t) = x_2 - a_2 x_3 \tag{39d}$$

可將(39a)-(39d)整理成矩陣型式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{40}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\Rightarrow y = Cx + Du$$

例題

將轉移函數 $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s-1}{s^3+3s^2+2s+1}$ 轉換成可觀典型式的狀態空間表示式。

解：

<u>步驟一</u>：令轉移函數為

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s^3+3s^2+2s+1}$$

$$\Rightarrow (s^3+3s^2+2s+1)Y(s) = (s-1)U(s)$$

$$\Rightarrow s^3 Y(s) = -3s^2 Y(s) + s(U(s) - 2Y(s)) + (-U(s) - Y(s))$$

$$\Rightarrow Y(s) = -3\frac{1}{s}Y(s) + \frac{1}{s^2}(U(s) - 2Y(s)) + \frac{1}{s^3}(-U(s) - Y(s))$$

$$= \frac{1}{s}\left\{ -3Y(s) + \frac{1}{s}\left[(U(s) - 2Y(s)) + \frac{1}{s}(-U(s) - Y(s)) \right] \right\} \tag{42}$$

<u>步驟二</u>：選定狀態變數

$$X_1(s) = \frac{1}{s}(-U(s) - Y(s)) \tag{43a}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}\left[(U(s) - 2Y(s)) + \frac{1}{s}(-U(s) - Y(s)) \right]$$

$$= \frac{1}{s}\left[(U(s) - 2Y(s)) + X_1(s) \right] \tag{43b}$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s}\left\{ -3Y(s) + \frac{1}{s}\left[(U(s) - 2Y(s)) + \frac{1}{s}(-U(s) - Y(s)) \right] \right\}$$

$$=\frac{1}{s}\{-3Y(s)+X_2(s)\} \tag{43c}$$

則

$$sX_1(s)=(-U(s)-Y(s)) \tag{44a}$$

$$sX_2(s)=[(U(s)-2Y(s))+X_1(s)] \tag{44b}$$

$$sX_3(s)=\{-3Y(s)+X_2(s)\} \tag{44c}$$

$$Y(s)=X_3(s) \tag{44d}$$

對 (44a)式-(44d)式的取反拉氏轉換，可得

$$\dot{x}_1=-u-x_3 \tag{45a}$$

$$\dot{x}_2=u-2x_3+x_1 \tag{45b}$$

$$\dot{x}_3=-3x_3+x_2 \tag{45c}$$

$$y=x_3 \tag{45d}$$

其向量矩陣型式為

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u \tag{46a}$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \tag{46b}$$

狀態空間到轉移函數的轉換

若狀態方程式和輸出方程式為

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{47}$$

$$y=Cx+Du \tag{48}$$

則初始值為零的拉氏轉換為

$$sX(s)=AX(s)+BU(s) \tag{49}$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{50}$$

解出(47)式的 $X(s)$，移項後可得

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \tag{51}$$

移項後，可得到

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \tag{52}$$

將(52)式代入(50)式，可得

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$= [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \tag{51}$$

(51)式中的輸出向量為 $Y(s)$，輸入向量為 $U(s)$，$[C(sI - A)^{-1}B + D]$ 稱為轉移函數矩陣(transfer function matrix)。若 $U(s)$ 和 $Y(s)$ 為純量，可得轉移函數為

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{52}$$

例題

給定(53)式所定義的系統，求其轉移函數 $T(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$，其中 $Y(s)$ 為輸出，而 $U(s)$ 為輸入。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{53a}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \tag{53b}$$

解：

首先求 $(sI - A)$，

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 4 & 5 & s+6 \end{bmatrix} \tag{54}$$

接著求 $(sI-A)^{-1}$，

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s^2+6s+5) & s+6 & 1 \\ -4 & s(s+6) & s \\ -4s & -(5s+4) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+6s^2+5s+4} \tag{55}$$

將 $(sI-A)^{-1}$，B，C，D 代入(52)式，其中

$$B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}，C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}，D = 0$$

可得轉移函數為

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} (s^2+6s+5) & s+6 & 1 \\ -4 & s(s+6) & s \\ -4s & -(5s+4) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+6s^2+5s+4} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} (s^2+6s+5) & s+6 & 1 \end{bmatrix}}{s^3+6s^2+5s+4} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{10(s^2+6s+5)}{s^3+6s^2+5s+4} \tag{56}$$

MATLAB指令：[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,iu)

註：iu代表第i個輸入