控制系統

控制系統簡介

授課老師：郭姿君

➢連續資料系統之時間響應：前言

1. 控制系統的時間響應通常可分爲兩部份：
暫態響應 **(transient response)**和穩態響應 **(steady-state response)**。

2. 令 ***y*(*t*)** 代表時間響應

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

其中 $y_t(t)$ 爲暫態響應，$y_{ss}(t)$ 爲穩態響應。

- 暫態響應可定義爲當時間趨近無窮大時響應變爲零的部份

$$\lim_{t\to\infty} y_t(t) = 0$$

- 穩態響應是在暫態響應消失後，所剩餘部份的響應

3. 若輸出的穩態響應與輸入不一致，就稱此系統有穩態誤差 **(steady-state error)**。

➢控制系統時間響應的典型測試訊號

爲了時域分析的方便，常使用下列的測試訊號：

1. 步階函數輸入：

$$\begin{aligned} r(t) &= R \qquad t \geq 0 \\ &= 0 \qquad t < 0 \end{aligned}$$

或 $r(t) = Ru_s(t)$

其中 ***R*** 爲常數

$u_s(t)$ 爲單位步階函數

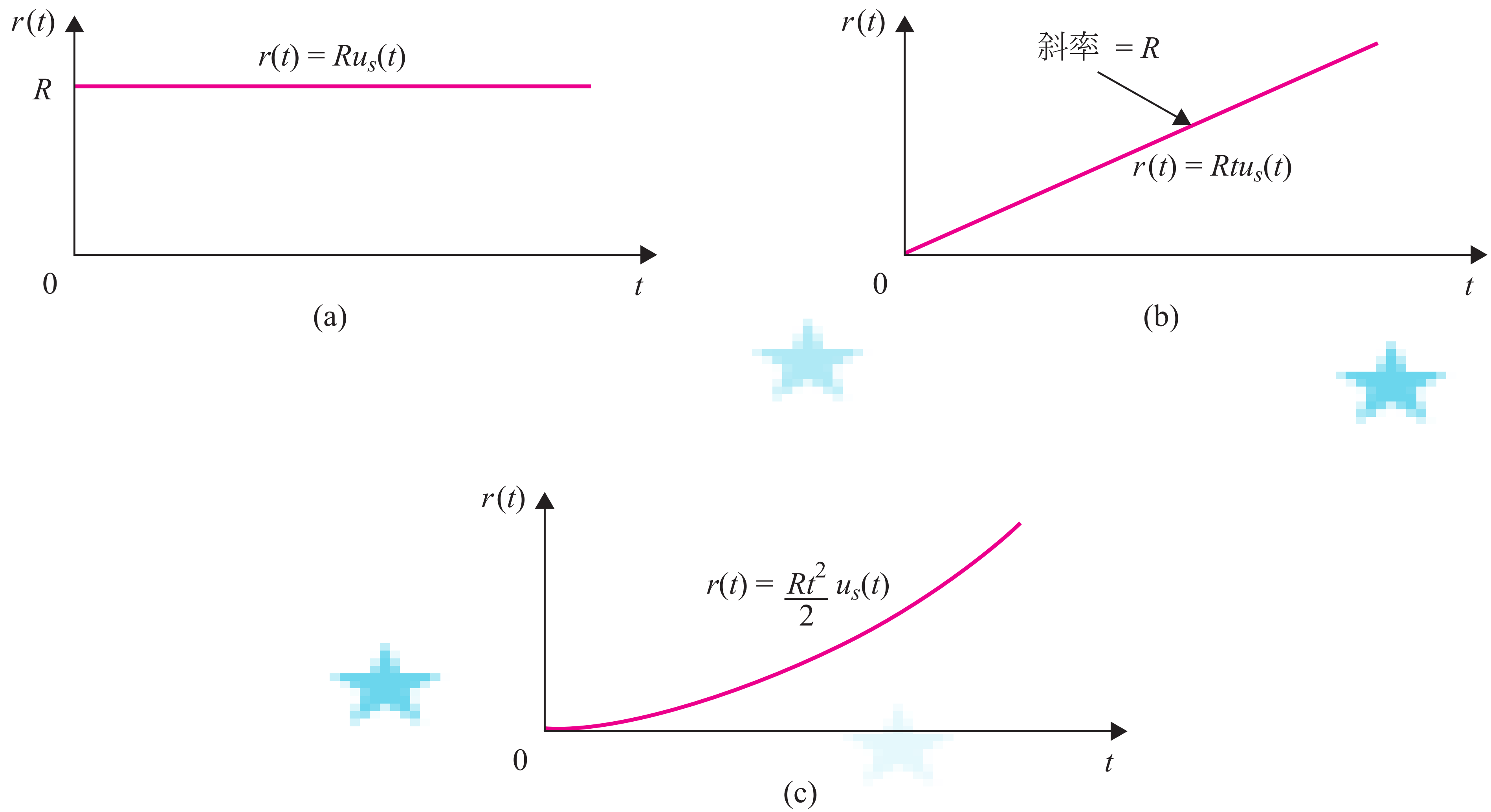


圖1 控制系統的基本時域測試訊號。(a) 步階函數；(b) 斜坡函數；(c) 拋物線函數

♣ 由於步階函數有一不連續的跳躍，它的頻譜包含極寬的頻率；因此，將步階函數當作測試訊號相當於在一很寬的頻率範圍內多種弦波訊號的同時應用。

2. 斜坡函數輸入：

$$r(t) = Rtu_s(t)$$

R 爲實常數

♣ 斜坡函數有能力測試系統對一隨時間線性變化的訊號響應。

3. 拋物線函數輸入：

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2}u_s(t)$$

R 爲實常數

★ t^3，稱爲顫振函數 ⇨ 很少用！

➢單位步階響應及時域規格

♣ 對於線性控制系統，暫態響應的特性通常以單位步階函數 $u_s(t)$ 作爲輸入。此種響應稱爲單位步階響應。

◆ 系統的性能特性定義：

1. 最大超越量　令 $y(t)$ 爲單位步階響應。令 y_{max} 爲 $y(t)$ 的最大值，y_{ss}爲 $y(t)$ 的穩態值，且 $y_{max} \geq y_{ss}$。

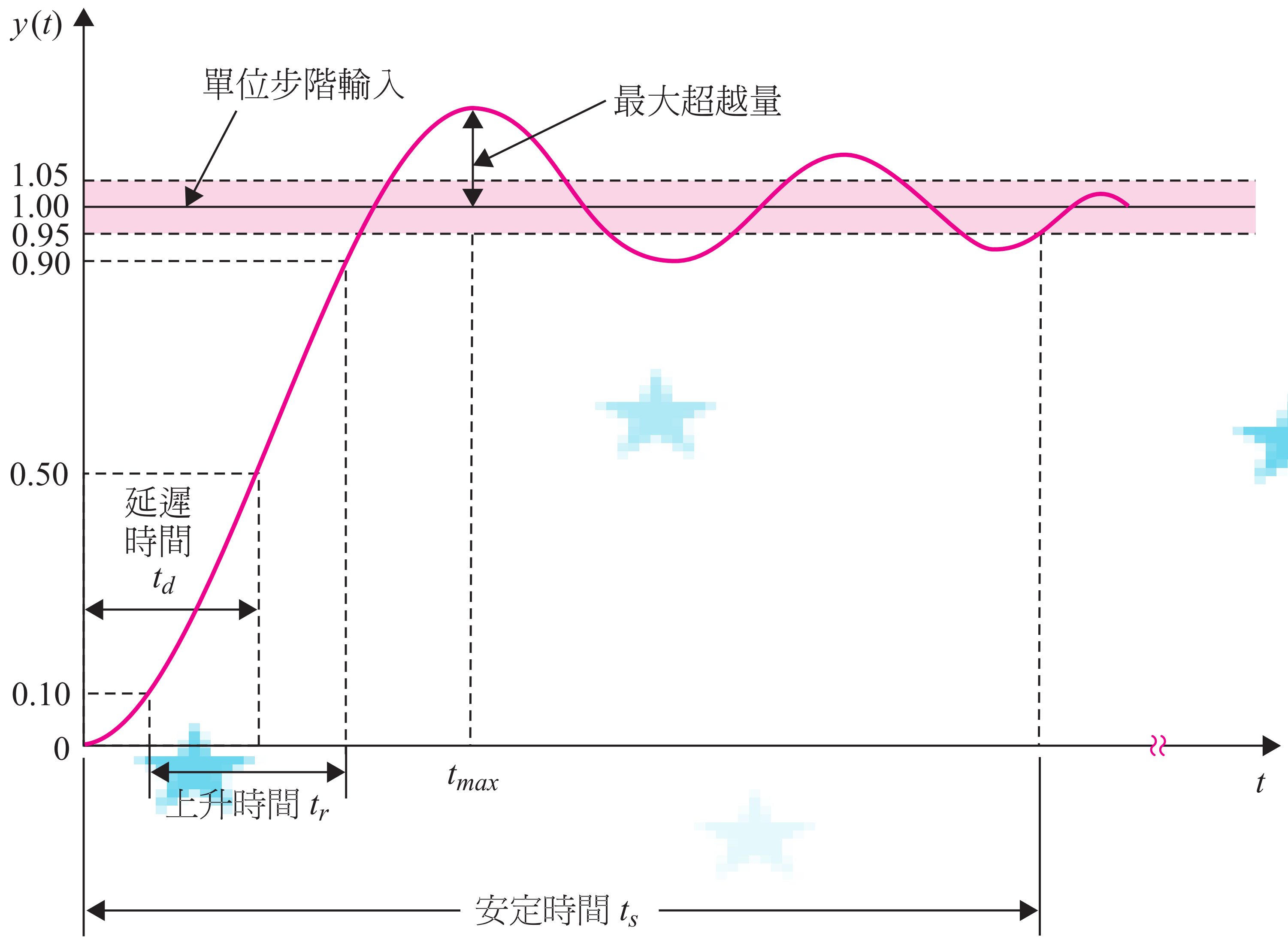


圖2 用來說明時域規格之控制系統的典型單位步階響應

最大超越量 = $y_{max} - y_{ss}$

最大超越量通常視爲時域規格。

♣ 最大超越量通常以步階響應最終值的百分比來表示

$$\text{最大超越量百分比} = \frac{\text{最大超越量}}{y_{ss}} \times 100\%$$

測量系統的相對穩定性

◇ **若系統轉移函數有奇數個零點在 s 右半平面，則亦可能發生負的最大超越值。**

2. 延遲時間 達到步階響應最終值的 50% 所需的時間定義爲延遲時間 t_d 示。

3. 上升時間 由步階響應最終值的 10% 上升到 90% 所需的時間定義爲上升時間 t_r。
另一種測量法爲，上升時間以步階響應在響應等於其最終值的 50% 時瞬間斜率的倒數來表示。

4. 安定時間 步階響應衰減至且停留在其最終值的特定百分比以內時所需的時間定義爲安定時間 t_s。通常使用的數值是 5%。

5. 穩態誤差 系統響應的穩態誤差定義爲系統達到穩態 (即 $t \to \infty$) 時，輸出與參考輸入間之差異值。

➢穩態誤差

1. 在穩態時，輸出及參考值的差，我們定義為穩態誤差。
2. 在設計系統時，必須使誤差減至最低程度，或讓誤差低於某一容忍值。同時，暫態響應也必須滿足某種規格。

•線性連續資料控制系統的穩態誤差

♣ 線性控制系統的穩態誤差必須視系統的型態和參考輸入類型而定。

★ 相對於系統架構的穩態誤差定義

1. 考慮閉迴路系統，其中 ***r*** **(*t*)** 為輸入，***u*** **(*t*)** 為激勵訊號，***b*(*t*)** 為回授訊號，及 ***y*(*t*)** 為輸出。
2. 系統誤差的定義：

   $e(t)$ = 參考訊號 − $y(t)$

   參考訊號為輸出 ***y*(*t*)** 所要追蹤的訊號。
3. 系統為單位回授時 [即 ***H*(*s*) = 1**]，輸入 ***r*** **(*t*)** 為參考訊號，則誤差可簡化為

   $e(t) = r(t) - y(t)$

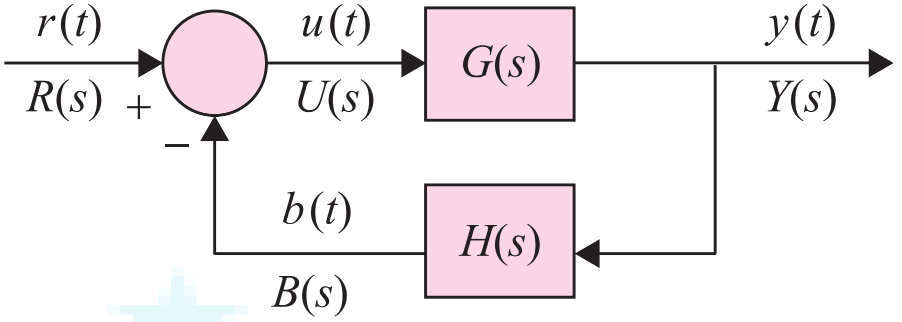


圖3 非單位回授的控制系統

穩態誤差定義：$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$

4. 當 ***H*(s)** 不為 **1**，則圖 **3** 中的激勵訊號 ***u* (*t*)** 不一定為誤差，端視 ***H*(s)** 的型式和目的而定。

Ex. 假設系統其目的為使輸出 ***y*(*t*)** 盡可能緊密地追蹤 ***r* (*t*)**，且系統轉移函數為

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)}$$

1) 當 ***H*(s) = 1** 時，特性方程式為

$$s^3 + 12s^2 + 1 = 0$$

⇨ 閉迴路系統為不穩定

2) 當***H*(s)**變成

$$H(s) = \frac{5(s+1)}{(s+5)}$$

特性方程式變成

$$s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5 = 0$$

⇨ 系統穩定

♣ 系統誤差 ：

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Ex. 考慮一速度控制系統，其中以步階輸入來控制在穩態時可包含一斜坡的系統輸出。系統轉移函數可如以下型式

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)} \qquad H(s) = K_t s$$

其中 ***H*(*s*)** 爲機電或電子轉速計之轉移函數，且 K_t 爲轉速計常數。

1) 參考訊號爲所設計的速度，但並非 ***r*(*t*)**。

♣ 由於 ***r*(*t*)** 和 ***y*(*t*)** 的因次不同，所以上 式定義誤差將無意義。

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

2) 令 K_t **= 10 V/rad/sec**。此乃表示對一步階輸入爲 **1** 伏特時，穩態時所需速度爲 **1/10** 或 **0.1 rad/sec**，因爲當此一條件達到時，轉速計之輸出電壓爲 **1** 伏特，且穩態誤差爲零。

3) 系統之閉迴路轉移函數：

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{s(s^2 + 12s + 10)}$$

4) 對於步階函數輸入，***R*(*s*) = 1/*s***。輸出時域響應爲

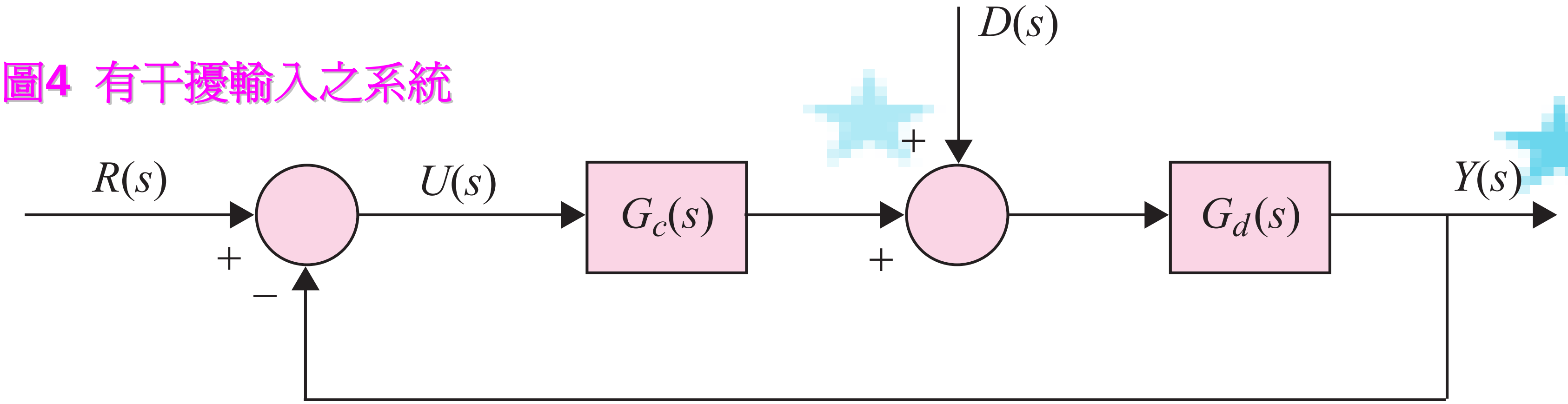
$$y(t) = 0.1t - 0.12 - 0.000796e^{-11.1t} + 0.1208e^{-0.901t} \qquad t \geq 0$$

5) $y(t)$ 的穩態部份為 $0.1t - 0.12$。故系統穩態誤差為

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty}[0.1t - y(t)] = 0.12$$

♣ 並非所有的系統誤差均依據輸入所得的輸出響應來定義。圖 4 的系統除輸入 $r(t)$ 外，還有干擾 $d(t)$。由 $d(t)$ 單獨作用所產生之輸出也可定義為誤差。

圖4 有干擾輸入之系統



♦ 為對線性系統的穩態誤差作有系統的討論，以下將區分三種系統分別討論之。

1. 單位回授系統；$H(s) = 1$。
2. 非單位回授系統，但 $H(0) = K_H$ = 常數。
3. 非單位回授系統，且 $H(s)$ 在 $s = 0$ 有 N 階之零點。

★ 控制系統的型式：單位回授系統

1. $H(s)=1$ 之單位回授控制系統的方塊圖：圖 5。

2. 系統穩態誤差：

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

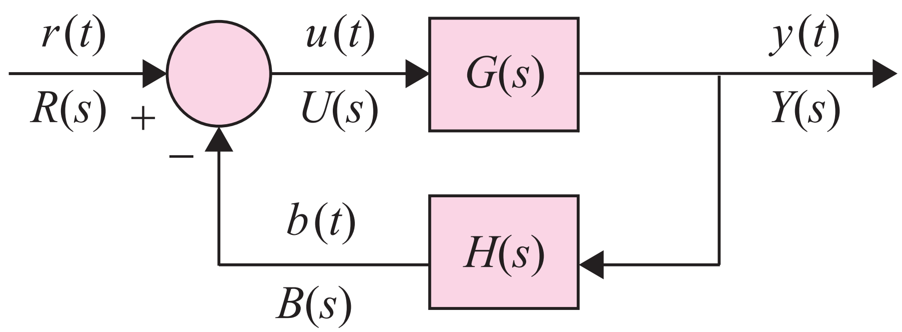


圖5 非單位回授的控制系統

系統之型式在此只針對單位回授系統定義

3. e_{ss} 與 $G(s)$ 在 $s = 0$ 之極點數目有關。此一數目即為控制系統的型式，或簡稱系統型式。

4. 利用順向路徑轉移函數 $G(s)$ 的型式來定出系統型式:

$$G(s)=\frac{K(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots(1+T_{m1}s+T_{m2}s^2)}{s^j(1+T_as)(1+T_bs)\cdots(1+T_{n1}s+T_{n2}s^2)}e^{-T_ds}$$

其中 K 和所有的 T 為實常數。

若閉迴路系統的順向路徑轉移函數如上式，則系統的型式為 j，其中 $j = 0$，1，2，…。

▸ 例題

$$G(s)=\frac{K(1+0.5s)}{s(1+s)(1+2s)(1+s+s^2)}$$

⇨ 型式 1

$$G(s) = \frac{K(1+2s)}{s^3}$$ ⇒ 型式 3

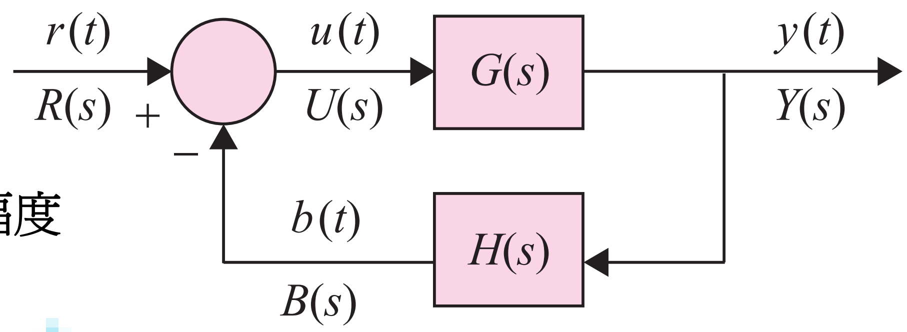


圖6 非單位回授的控制系統

★ 不同型態的輸入對穩態誤差的影響：

[A] 具步階函數輸入之系統的穩態誤差

1. 圖 系統的 ***H*** **(s) = 1**且參考輸入 ***r*** **(*t*)** 是幅度爲 ***R*** 的步階函數，其輸入的拉氏轉換爲 ***R/s***。

2. 穩態誤差：

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{R}{1+G(s)} = \frac{R}{1+\lim\limits_{s\to 0}G(s)}$$

3. 步階誤差常數 **(step-error constant)**：

$$K_p = \lim_{s\to 0}G(s) \quad \textbf{(7-24)} \quad \Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$$

4. 步階輸入時典型的 e_{ss}：圖 6

1) 型式 0 的系統：

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} = \text{常數}$$

2) 型式 1 或更高的系統：

$$e_{ss} = 0$$

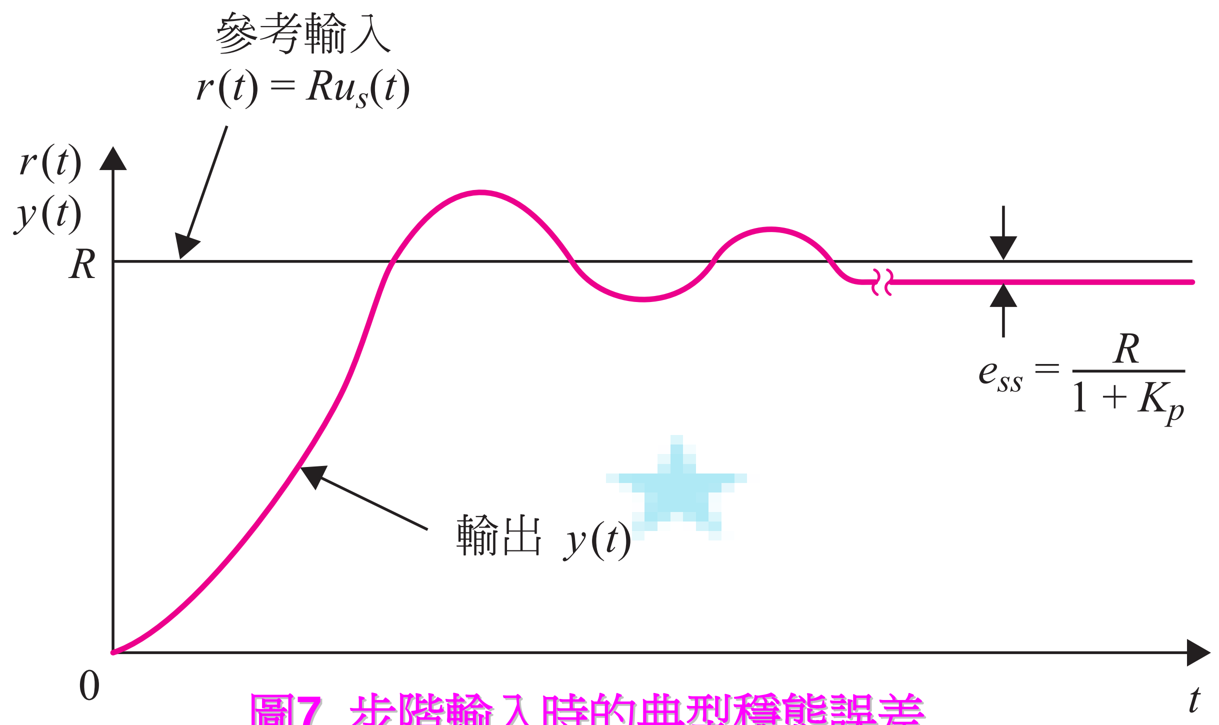


圖7 步階輸入時的典型穩態誤差

[B] 具斜坡輸入函數之系統的穩態誤差

1. 控制系統 **[*H*(*s*)=1]** ：圖 7。

2. 輸入：幅度爲 ***R*** 的斜坡函數

$$r(t) = Rtu_s(t)$$

其中 ***R*** 爲常數

$$\Rightarrow \quad R(s) = \frac{R}{s^2}$$

3. 穩態誤差：

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{R}{s + sG(s)} = \frac{R}{\lim_{s\to 0} sG(s)}$$

斜坡誤差常數K_v只定義於系統為斜坡輸入

4. 斜坡誤差常數 (ramp-error constant)： $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$

$$\Rightarrow \quad e_{ss} = \frac{R}{K_v}$$

其中 K_v 為有限值且不為零。

5. 對斜坡輸入的典型e_{ss}：圖 8

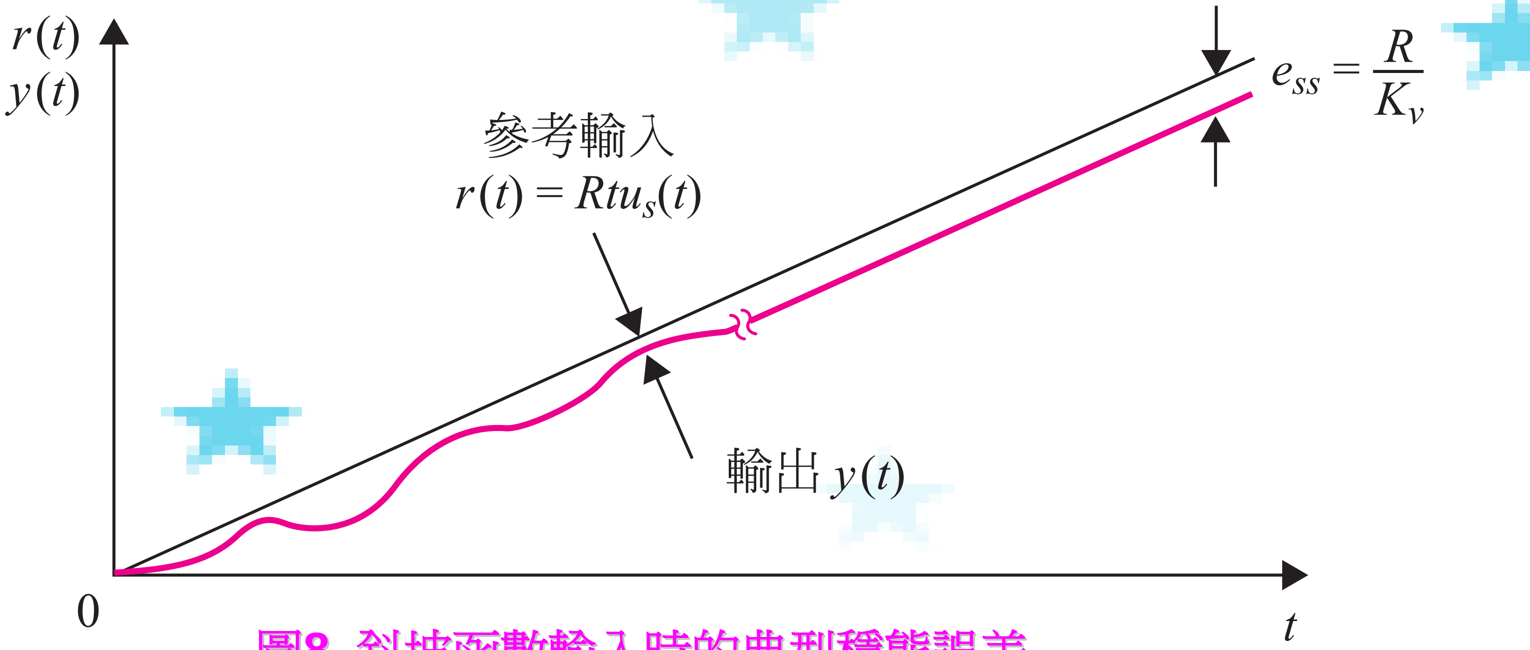


圖8 斜坡函數輸入時的典型穩態誤差

6. 當輸入為斜坡函數時，若要 e_{ss} 為零，則 K_v 必須為無限大。

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^{j-1}} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{型式 0 的系統：} & e_{ss} = \infty \\ \text{型式 1 的系統：} & e_{ss} = \dfrac{R}{K_v} = \text{常數} \\ \text{型式 2 或更高的系統：} & e_{ss} = 0 \end{cases}$$

[C] 具拋物線函數輸入之系統的穩態誤差

拋物線誤差常數K_a只定義於系統為拋物線輸入時

1. 控制系統 **[*H*(*s*)=1]** ：圖 8。

2. 輸入：拋物線函數

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2} u_s(t) \Rightarrow R(s) = \frac{R}{s^3}$$

3. 穩態誤差： $e_{ss} = \dfrac{R}{\lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)}$

其中 K_a 為有限值且不為零。

4. 拋物線誤差常數 **(parabolic-error constant)** ：

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) \Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{K_a}$$

5. 由拋物線函數輸入所造成之系統典型的 e_{ss}：圖9

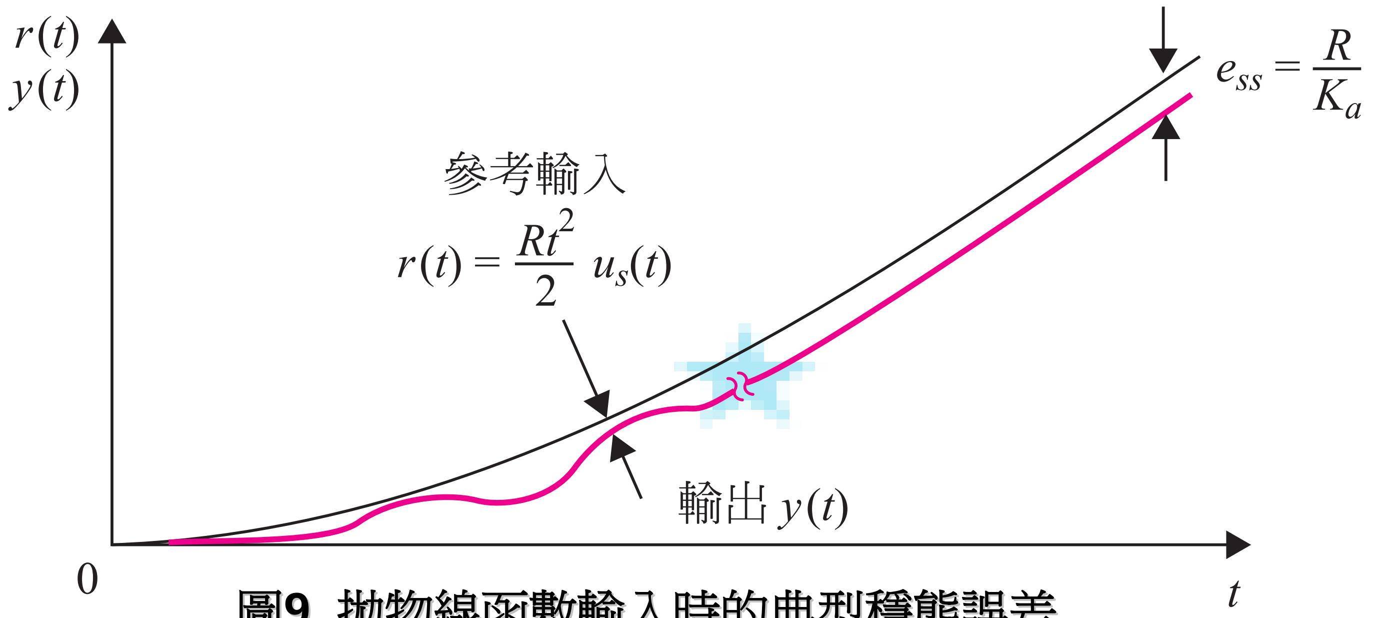


圖9 拋物線函數輸入時的典型穩態誤差

型式 0 的系統：$e_{ss}=\infty$

型式 1 的系統：$e_{ss}=\infty$

型式 2 的系統：$e_{ss}=\frac{R}{K_a}=$ 常數

型式 3 或更高的系統：$e_{ss}=0$

任何線性閉迴路系統由輸入訊號其階數比拋物線函數來得高者所造成的穩態誤差，皆可用相同方法推導出。

♣ 穩態誤差分析可以歸納成表 1。

表1　單位回授系統對步階、斜坡及拋物線函數輸入之穩態誤差摘要

系統型式	誤差常數			穩態誤差 e_{ss} 步階輸入	斜坡輸入	拋物線輸入
j	K_p	K_v	K_a	$\frac{R}{1+K_p}$	$\frac{R}{K_v}$	$\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

♣ 一些結論：

1. 在誤差分析時，步階、斜坡，以及拋物線誤差常數，只有在輸入分別為步階函數、斜坡函數，以及拋物線函數時才有意義。
2. 由於誤差常數是根據順向轉移函數 $G(s)$ 定義，此一方法只適用於 **$H(s)=1$** 且架構如**圖6**所示之系統。由於誤差分析是依據拉氏轉換之終值定理，因此必須先查看 $sE(s)$ 是否有任何極點在 $j\omega$ 軸或 s 右半平面。
3. 在**表 1** 所整理之穩態誤差特性只有在系統為單位回授時才有用。
4. 當系統的輸入是上面三種基本輸入函數的線性組合時，其穩態誤差可以由個別輸入所造成誤差的疊加合成。
5. 當系統架構非如**圖 6** (且 **$H(s) = 1$**) 時，則可對系統加以簡化，使其如**圖 6** 之架構，或者可以找出誤差訊號再用終值定理求解。而此處所定義之誤差常數是否適用，則需視個別情形而定。

♣ **誤差常數法亦不能用於弦波輸入訊號，因為終值定理在該處無法使用。**

▸ **例題** 考慮如**圖 6** 之 **$H(s)=1$** 的系統，其轉移函數如下所示。利用三種基本輸入型態之誤差常數，試求誤差常數和穩態誤差。

<Sol.>

(a)

$$G(s)=\frac{K(s+3.15)}{s(s+1.5)(s+0.5)}$$

$H(s) = 1$ ⇨ 型式 **1** 系統

1. 誤差常數和穩態誤差：

步階輸入： 步階誤差常數 $K_p = \infty$ $\qquad e_{ss} = \dfrac{R}{1+K_p} = 0$

斜坡輸入： 斜坡誤差常數 $K_v = 4.2K$ $\qquad e_{ss} = \dfrac{R}{K_v} = \dfrac{R}{4.2K}$

拋物線輸入：拋物線誤差常數 $K_a = 0$ $\qquad e_{ss} = \dfrac{R}{K_a} = \infty$

2. 只有在 **0 < *K* < 1.304** 時，閉迴路系統才穩定。

(b) $G(s) = \dfrac{K}{s^2(s+12)}$ ***H*(*s*) = 1** ⇨ 型式 **2** 系統

1. 對於所有 ***K*** 值，閉迴路系統均不穩定，故誤差分析無意義。

(c) $G(s) = \dfrac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)}$ ***H*(*s*) = 1** ⇨ 型式 **2** 系統

1. 誤差常數與穩態誤差 ：

步階輸入： 步階誤差常數 $K_p = \infty$ $\qquad e_{ss} = \dfrac{R}{1+K_p} = 0$

斜坡輸入：　斜坡誤差常數 $K_v=\infty$　　$e_{ss}=\dfrac{R}{K_v}=0$

拋物線輸入：拋物線誤差常數 $K_a=1/12$　　$e_{ss}=\dfrac{R}{K_a}=12R$

2. 閉迴路系統為穩定。

♦ 穩態誤差與閉迴路轉移函數之間的關係：

[A] 單位回授和非單位回授系統

1. 穩態誤差只與閉迴路系統的順向轉移函數有關。

2. 通常在分析過程中，常要推導閉迴路轉移函數，且必須建立穩態誤差和閉迴路轉移函數係數之間的關係。

3. 閉迴路轉移函數可用於求得單位回授與非單位回授系統的穩態誤差。

4. 假設下列條件成立：

$$\lim_{s\to 0} H(s) = H(0) = K_H = \text{常數}$$

此即表示 ***H*(*s*)** 沒有 ***s* = 0** 的極點。

5. 參考訊號定義為 ***r* (*t*)/*K*$_H$**，且誤差訊號為 $e(t) = \dfrac{1}{K_H} r(t) - y(t)$

$$E(s) = \frac{1}{K_H}R(s) - Y(s) = \frac{1}{K_H}[1 - K_H M(s)]R(s)$$

其中 ***M*(s)** 爲閉迴路轉移函數 **Y(s)/R(s)**。

6. 假設 ***M*(s)** 沒有任何極點在 **s = 0**，且其型式爲

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

其中 ***n* > *m***。

在此，***M*** **(s)** 的所有極點均在 **s** 左半平面，即系統爲穩定。

7. 系統的穩態誤差：

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1}{K_H}[1 - K_H M(s)]sR(s)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\lim_{s \to 0} \frac{s^n + \cdots + (a_1 - b_1 K_H)s + (a_0 - b_0 K_H)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} sR(s)$$

8. 考慮 ***r*** **(*t*)** 的三種基本輸入型態：

1). 步階函數輸入 ***R*(s) = *R*/*s***。

穩態誤差變成

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\left(\frac{a_0 - b_0 K_H}{a_0}\right)R$$

由步階輸入造成之穩態誤差爲零的條件爲

$$a_0 - b_0 K_H = 0$$

或

$$M(0) = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{K_H}$$

欲使單位回授系統在步階輸入時的穩態誤差爲零，其條件爲閉迴路轉移函數的分子及分母的常數項相等

此表示單位回授系統 $K_H = 1$，$M(s)$ 之分子及分母的常數項必須相等，亦即 $b_0 = a_0$ 時，才能使穩態誤差爲零。

2). 斜坡函數輸入 $R(s) = R/s^2$。

穩態誤差變成

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\lim_{s\to 0}\frac{s^n + \cdots + (a_1 - b_1K_H)s + (a_0 - b_0K_H)}{s(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)}R$$

以下爲可能的 e_{ss} 值：

$e_{ss} = 0$　　若 $a_0 - b_0K_H = 0$ 且 $a_1 - b_1K_H = 0$

$e_{ss} = \dfrac{a_1 - b_1K_H}{a_0K_H}R =$ 常數　　若 $a_0 - b_0K_H = 0$ 且 $a_1 - b_1K_H \neq 0$

$e_{ss} = \infty$　　若 $a_1 - b_1K_H \neq 0$

3). 拋物線函數輸入 $R(s) = R/s^3$。

穩態誤差變成

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\lim_{s\to 0}\frac{s^n + \cdots + (a_2 - b_2K_H)s^2 + (a_1 - b_1K_H)s + (a_0 - b_0K_H)}{s^2(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)}R$$

以下為可能的 e_{ss} 值：

$e_{ss} = 0$ 若 $a_i - b_iK_H = 0$ 在 $i = 0$，1 及 2

$e_{ss} = \dfrac{a_2 - b_2K_H}{a_0K_H}R =$ 常數 若 $a_i - b_iK_H = 0$ 在 $i = 0$ 及 1

$e_{ss} = \infty$ 若 $a_i - b_iK_H \neq 0$ 在 $i = 0$ 或 1

▸ 例題 在圖 **6** 之系統，其順向及閉迴路轉移函數如下所示。

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)} \qquad M(s) = \frac{5(s+1)}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5}$$

系統假設為單位回授，所以 $\boldsymbol{H(s) = 1}$，及 $\boldsymbol{K_H = H(0) = 1}$。試求由三種基本型態輸入所得的穩態誤差。

<Sol.>

1. ***M*(*s*)** 之極點全都在 ***s*** 左半平面，系統為穩定。

2. 穩態誤差為

步階輸入：$e_{ss}=0$，因 $a_0=b_0(=5)$

斜坡輸入：$e_{ss}=0$，因 $a_0=b_0(=5)$，且 $a_1=b_1(=5)$

抛物線輸入：$e_{ss}=\dfrac{a_2-b_2K_H}{a_0K_H}R=\dfrac{60}{5}R=12R$

▸ **例題** 考慮**圖 6**之系統，其轉移函數如下：

$$G(s)=\frac{1}{s^2(s+12)} \qquad H(s)=\frac{5(s+1)}{s+5}$$

試求由三種基本型態輸入所得的穩態誤差。

<Sol.>

1. 依題意，知 $K_H=H(0)=1$。

2. 閉迴路轉移函數：

$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{s+5}{s^4+17s^3+60s^2+5s+5}$$

比較得 $a_0=5$，$a_1=5$，$a_2=60$，$b_0=5$，$b_1=1$，$b_2=0$。

3. 針對三種基本型態輸入，系統的穩態誤差可以求得爲

單位步階輸入，$r(t)=u_s(t)$：　$e_{ss}=\dfrac{a_0-b_0K_H}{a_0}=0$

單位斜坡輸入，$r(t)=tu_s(t)$：　$e_{ss}=\dfrac{a_1-b_1K_H}{a_0K_H}=\dfrac{5-1}{5}=0.8$

單位拋物線輸入，$r(t)=tu_s(t)/2$：　$e_{ss}=\infty$ 因 $a_1-b_1K_H\neq 0$

4. 加入單位步階、單位斜坡，及單位拋物線輸入於所述之系統，可得輸出：

1) 單位步階輸入時的輸出：

$$y(t)=1-0.00056\,e^{-12.05t}-0.0001381\,e^{-4.886t}$$
$$-\,0.9993e^{-0.0302t}\cos 0.2898t$$
$$-\,0.1301\,e^{-0.0302t}\sin 0.2898t\qquad t\geq 0$$

⇨ $y(t)$ 的穩態值爲 1，且穩態誤差爲零。

2) 單位斜坡輸入時的輸出：

$$y(t)=t-0.8+4.682\times 10^{-5}e^{-12.05t}+2.826\times 10^{-5}e^{-4.886t}$$
$$+\,0.8e^{-0.0302t}\cos 0.2898t-3.365e^{-0.0302t}\sin 0.2898t\qquad t\geq 0$$

針對單位斜坡，*y*(*t*) 的穩態成分為 *t* – 0.8，而穩態誤差為 0.8。

3) 單位拋物線輸入時的輸出：

$$y(t) = 0.5t^2 - 0.8t - 11.2 - 3.8842 \times 10^{-6}e^{-12.05t} - 5.784 \times 10^{-6}e^{-4.886t} + 11.2e^{-0.0302t}\cos 0.2898t + 3.9289e^{-0.0302t}\sin 0.2898t \qquad t \geq 0$$

y(*t*) 的穩態成分為 0.5*t* 2 –0.8*t* – 11.2。所以，穩態誤差為 0.8*t* + 11.2，此值隨時間趨近無窮大而變成無限值。

▸ 例題 考慮圖 6所示之系統，其轉移函數如下：

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)} \qquad H(s) = \frac{10(s+1)}{s+5}$$

試求由三種基本型態輸入所得的穩態誤差。

<Sol.>

1. 依題意，知 $K_H = \lim_{s\to 0} H(s) = 2$

2. 閉迴路轉移函數：

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{s+5}{s^4+17s^3+60s^2+10s+10}$$

3. 由三種基本型態輸入造成的系統穩態誤差計算如下：

1) 單位步階輸入時： $r(t) = u_s(t)$:

系統穩態誤差：

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\left(\frac{a_0 - b_0 K_H}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10 - 5 \times 2}{10}\right) = 0$$

步階響應：

$$y(t) = 0.5\, u_s(t) + \text{暫態項}$$

y(*t*) 之穩態值爲 0.5，且因 K_H = 2，故知單位步階輸入的穩態誤差爲 0。

2) 單位斜坡輸入時： $r(t) = tu_s(t)$

系統穩態誤差：

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\left(\frac{a_1 - b_1 K_H}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10 - 1 \times 2}{10}\right) = 0.4$$

單位斜坡輸入的響應：

$$y(t) = [0.5t - 0.4]u_s(t) + \text{暫態項}$$

穩態誤差：

$$e(t) = \frac{1}{K_H}r(t) - y(t) = 0.4u_s(t) - \text{暫態項}$$

由於暫態項會隨 *t* 趨近無限大時而衰減掉，斜坡輸入所造成的穩態誤差爲 0.4。

3) 單位拋物線輸入時： $r(t) = t^2 u_s(t)/2$

系統穩態誤差：

$e_{ss} = \infty$　　因 $a_1 - b_1 K_H \neq 0$

單位拋物線輸入的響應

$$y(t) = [0.25t^2 - 0.4t - 2.6]u_s(t) + \text{暫態項}$$

因單位拋物線輸入所引起的誤差

$$e(t) = \frac{1}{K_H} r(t) - y(t) = (0.4t - 2.6)u_s(t) - \text{暫態項}$$

穩態誤差爲 **0.4*t* + 2.6**，且隨時間而增加。

[B] 非單位回授之穩態誤差：*H*(*s*) 具有在 *s* = 0 的 *N* 階零點

1. 當 ***H*(*s*)** 有 ***N*** 階零點在 ***s* = 0**，相當於輸出在穩態時與輸入訊號的第 ***N*** 階導數成正比。
2. 在真實系統中，這就等同於加入一個轉速計或速率回授。
3. 參考輸入可以定義爲 $R(s)/K_H s^N$ ，且誤差訊號的拉氏轉換可定義爲

$$E(s) = \frac{1}{K_H s^N} R(s) - Y(s)$$

其中

$$K_H = \lim_{s \to 0} \frac{H(s)}{s^N}$$

4. 推導 $N = 1$ 的情況：

1) (7-40) 式的轉移函數 $M(s)$ 有一極點於 $s = 0$，即 $a_0 = 0$。

2) 由 (7-70) 式，穩態誤差爲

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_1K_H)s + (a_1 - b_0K_H)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s}\right]sR(s) \quad \textbf{(7-72)}$$

3) 對一振幅爲 R 的步階輸入，上式可寫成

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\lim_{s\to 0}\left[\frac{s^{n-1} + \cdots + (a_2 - b_1K_H)s + (a_1 - b_0K_H)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s}\right]R \quad \textbf{(7-73)}$$

4) 穩態誤差爲

$$e_{ss} = 0 \qquad 若\ a_2 - b_1K_H = 0\ 且\ a_1 - b_0K_H = 0 \qquad (7\text{-}74)$$

$$e_{ss} = \frac{a_2 - b_1K_H}{a_1K_H}R = 常數 \qquad 若\ a_1 - b_0K_H = 0\ 但\ a_2 - b_1K_H \neq 0 \qquad (7\text{-}75)$$

$$e_{ss} = \infty \qquad 若\ a_1 - b_0K_H \neq 0 \qquad (7\text{-}76)$$

▸ 例題 考慮圖 6 之系統，其轉移函數為

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)} \qquad H(s) = \frac{10s}{s+5}$$

試求由三種基本型態輸入所得的穩態誤差。

<Sol.>

1. 依題意，知 $K_H = \lim_{s\to 0}\frac{H(s)}{s} = 2$
2. 閉迴路轉移函數：

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 10s}$$

3. 由於系統的目標為以一步階輸入控制速度，雖然 ***M*(s)** 有一極點在 **s = 0**，但此速度控制系統仍為一穩定系統 。係數為：***a*$_0$ = 0**，***a*$_1$ = 10**，***a*$_2$ = 60**，***b*$_0$ =5**，及 ***b*$_1$ =1**。
4. 對單位步階輸入，由 **(7-75)** 式可求得穩態誤差為

$$e_{ss} = \frac{1}{K_H}\left(\frac{a_2 - b_1K_H}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{60 - 1\times 2}{10}\right) = 2.9$$

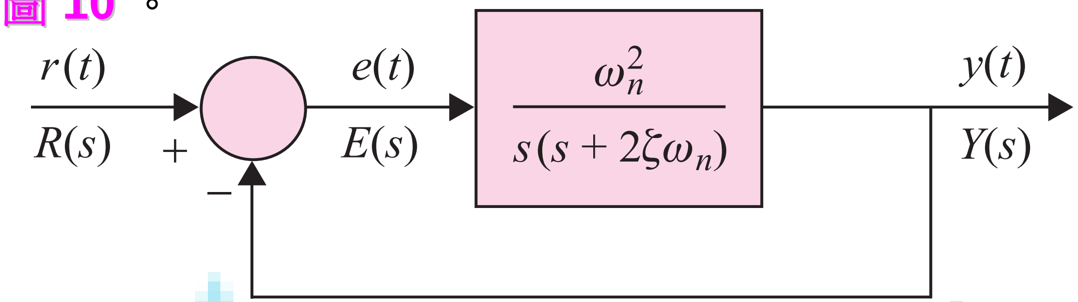
5. 驗證： 閉迴路轉移函數步階響應為

$$y(t) = (0.5t - 2.9)u_s(t) + \text{暫態項}$$

⇨ 在穩態時，參考輸入為 $t\,u_s(t)/K_H = 0.5t\,u_s(t)$。因此，穩態誤差為 **2.9**。

•標準二階系統的暫態響應

圖10 標準二階控制系統



1. 二階單位回授控制系統之方塊圖：圖 10 。
2. 系統之開迴路轉移函數：

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

其中，ζ 和 ω 爲實常數。

3. 系統閉迴路轉移函數：

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

4. 標準二階系統的特性方程式：

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

5. 對單位步階輸入 $R(s) = 1/s$，系統的輸出響應：

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

以正規化時間 $\omega_n t$ 及針對不同 ζ 值來作圖。

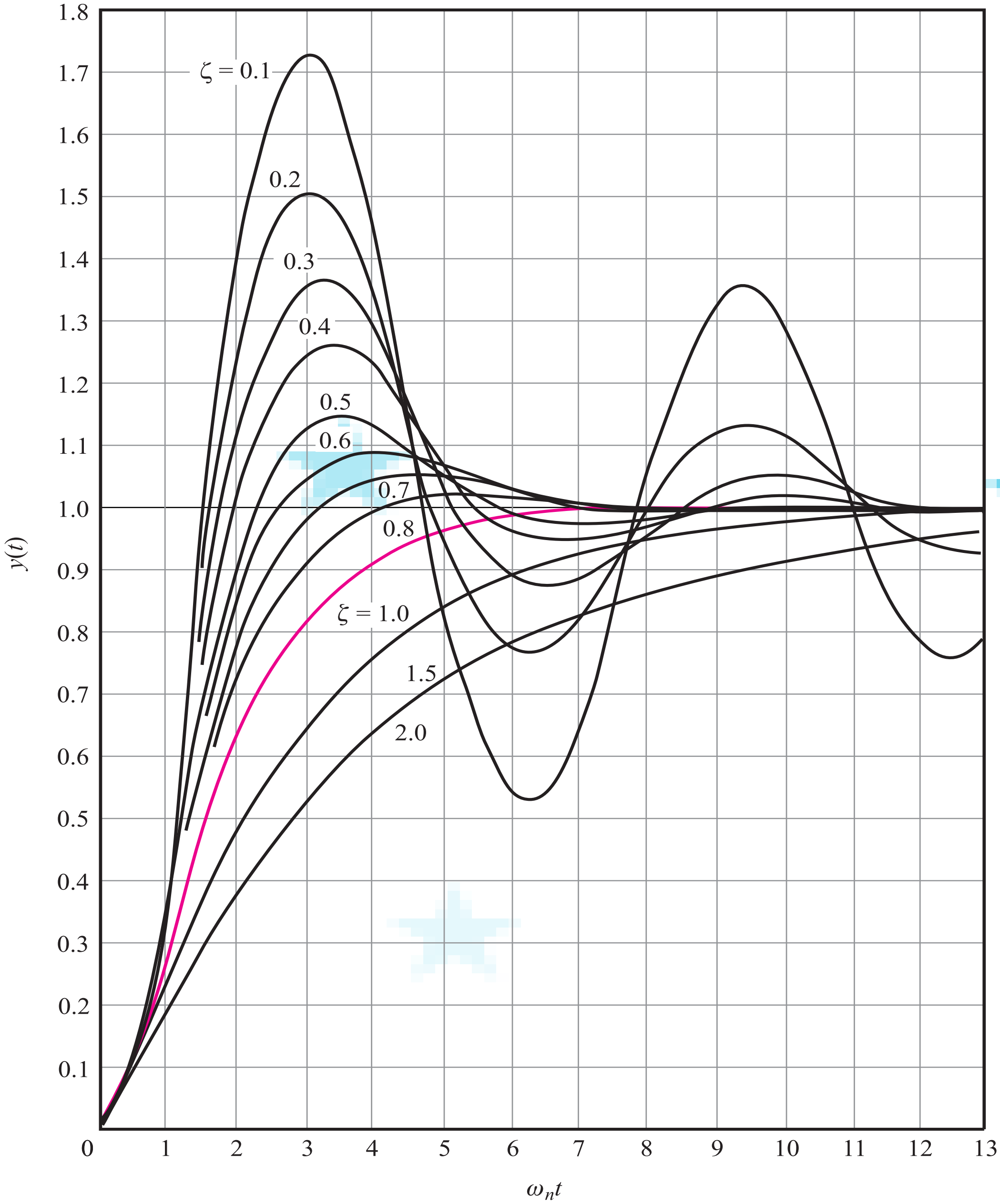
圖 10

$$\Rightarrow\quad y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \cos^{-1}\zeta\right) \qquad t \geq 0$$

圖 11 標準二階系統對單位步階函數輸入的暫態響應

當 ζ 減少時，響應便有較大的振盪，且超越量較大。當 $\zeta \geq 1$，步階響應則沒有任何振盪；亦即 $y(t)$ 在暫態時，不會超越終值。

ω_n 直接影響到上升時間、延遲時間，及安定時間，但不會影響超越量。



•阻尼比與阻尼係數

1. 系統參數 ζ 和 ω_n 對標準二階系統的步階響應 ***y*(*t*)** 之影響可由特性方程式的根來研究。

2. 特性方程式的二個根：

$$\begin{aligned} s_1, s_2 &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\alpha \pm j\omega \end{aligned}$$

其中 $\alpha = \zeta\omega_n$ **(7-98)** $\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

3. ζ 和 α 的物理意義：

1) α 控制了 ***y*(*t*)** 上升或下降的速率。

α 又稱為阻尼係數或阻尼常數

2) α 的倒數 ***1/α***，與系統的時間常數成正比。

4. 當特性方程式的兩根為相等實數時，我們稱此系統為臨界阻尼 **(critically damped)**。

$$\zeta = \text{阻尼比} = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{\text{實際阻尼係數}}{\text{臨界的阻尼係數}}$$

• 自然無阻尼頻率

1. 參數 ω_n 可定義為自然無阻尼頻率 **(natural undamped frequency)**。

2. ω 定義為條件頻率 **(*conditional frequency*)**，或阻尼頻率 **(*damped frequency*)**。

3. **圖 11** 說明了在特性方程式根的位置和 α、ζ、ω_n 與 ω 之間的關係。

- ω_n 是由 **s** 平面的原點至根的徑向距離。
- 阻尼因子 α 爲根的實數部份。
- 條件頻率 ω 是根的虛數部份。
- 阻尼比 ζ 是等於在根的徑向線和負實軸間夾角的餘弦；即

$$\zeta = \cos\theta$$

4. 圖 11所示爲 **(a)** 常數-ω_n 軌跡，**(*b*)** 常數-ζ 軌跡，**(*c*)** 常數-α 軌跡和 **(*d*)** 常數-ω 軌跡。在 **s** 平面上各區域依系統阻尼畫分如下：

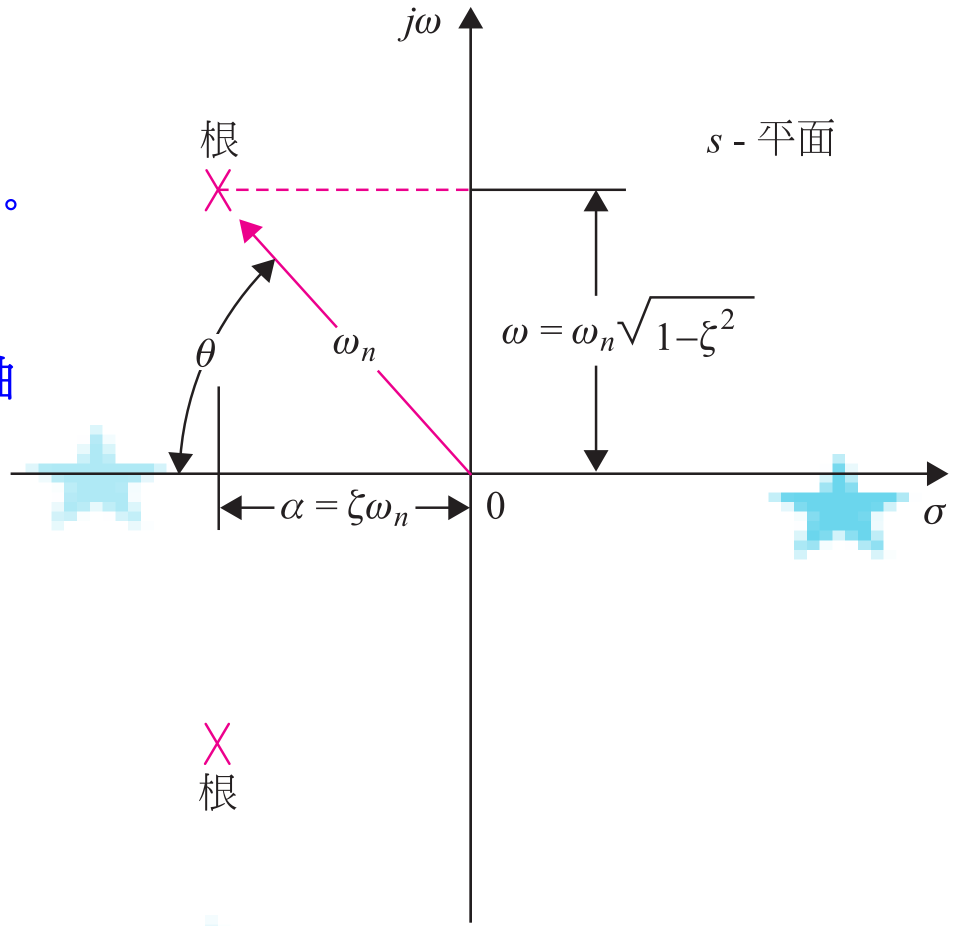
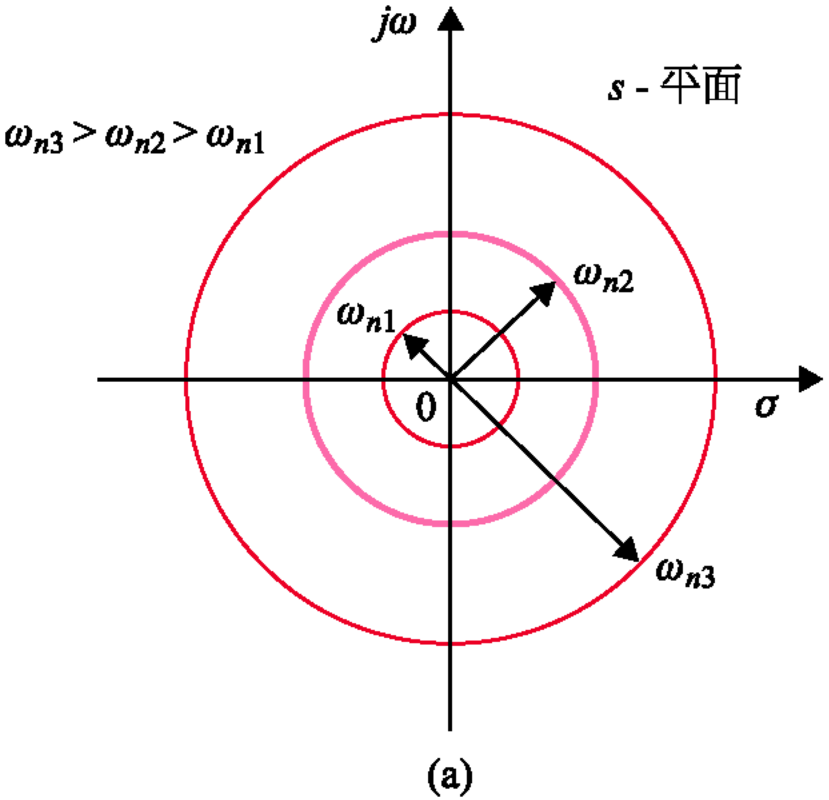


圖 11　標準二階系統特性方程式之根和 α、ζ、ω_n 與 ω 之間的關係



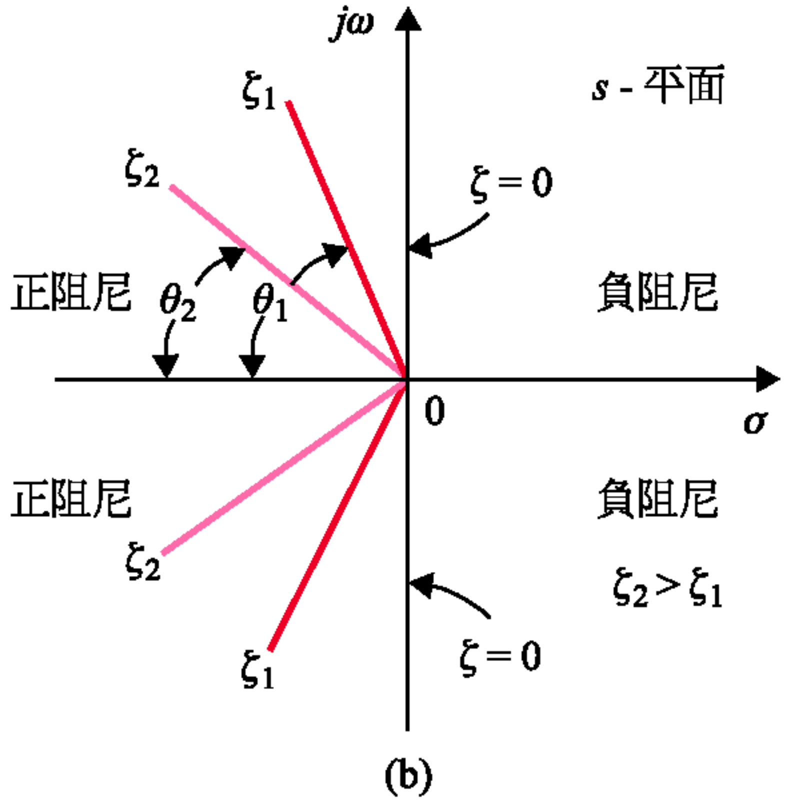


圖 12 (a) 自然無阻尼頻率為常數時之軌跡；(b) 常數阻尼比為常數時之軌跡；

- s 平面的左半邊是對應於正阻尼 (即阻尼因子或阻尼比為正的)，當阻尼為正時，因為 $e^{-\xi\omega_n t}$ 負指數的關係，步階響應將安定在其固定的終值上。此系統為穩定。

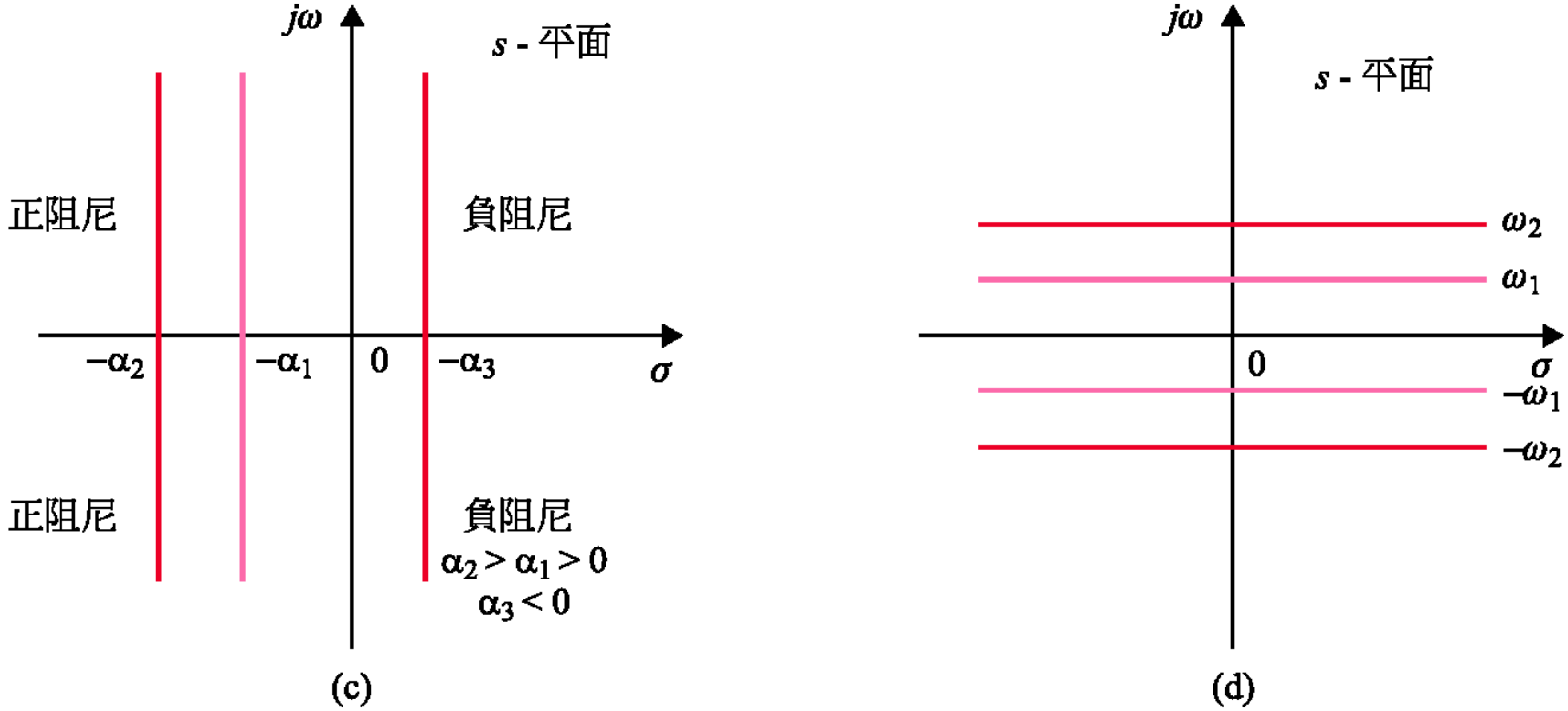


圖12 (c) 阻尼因子爲常數時之軌跡；(d) 條件頻率爲常數時之軌跡

- s 平面的右半邊對應於負阻尼，負阻尼則對應於無限制增長的響應，系統爲不穩定。

- 虛軸對應於零阻尼 ($\alpha = 0$，$\zeta = 0$)。零阻尼對應於持續的弦波振盪。系統爲臨界穩定，或臨界不穩定。

5. 特性方程式的根在二階系統中對阻尼的影響

在圖 7-18 中，當阻尼比 ζ 由 $-\infty$ 變化到 $+\infty$ 時 ω_n 保持常數。

下列對已知 ζ 值時系統的動態分類：

$0 < \zeta < 1$:	$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (-\zeta\omega_n < 0)$	欠阻尼
$\zeta = 1$:	$s_1, s_2 = -\omega_n$	臨界阻尼
$\zeta > 1$:	$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$	過阻尼
$\zeta = 0$:	$s_1, s_2 = \pm j\omega_n$	無阻尼
$\zeta < 0$:	$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (-\zeta\omega_n > 0)$	負阻尼

♣ 對於特性方程式的根在不同位置，所對應的單位步階響應列於圖 13。

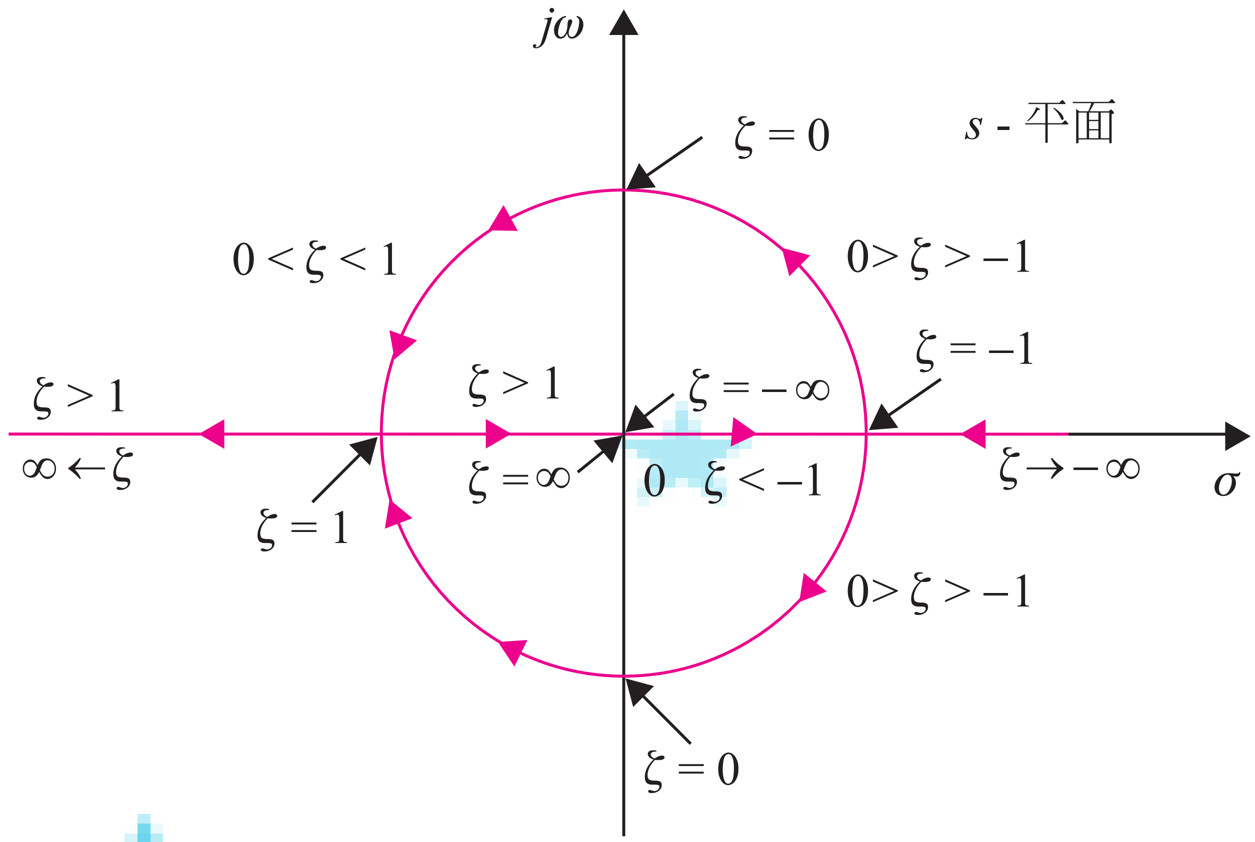


圖13　標準二階系統之特性方程式，即 (7-94) 式中當阻尼比由 –∞ 變化至 +∞ 而 ω_n 保持常數時的根軌跡

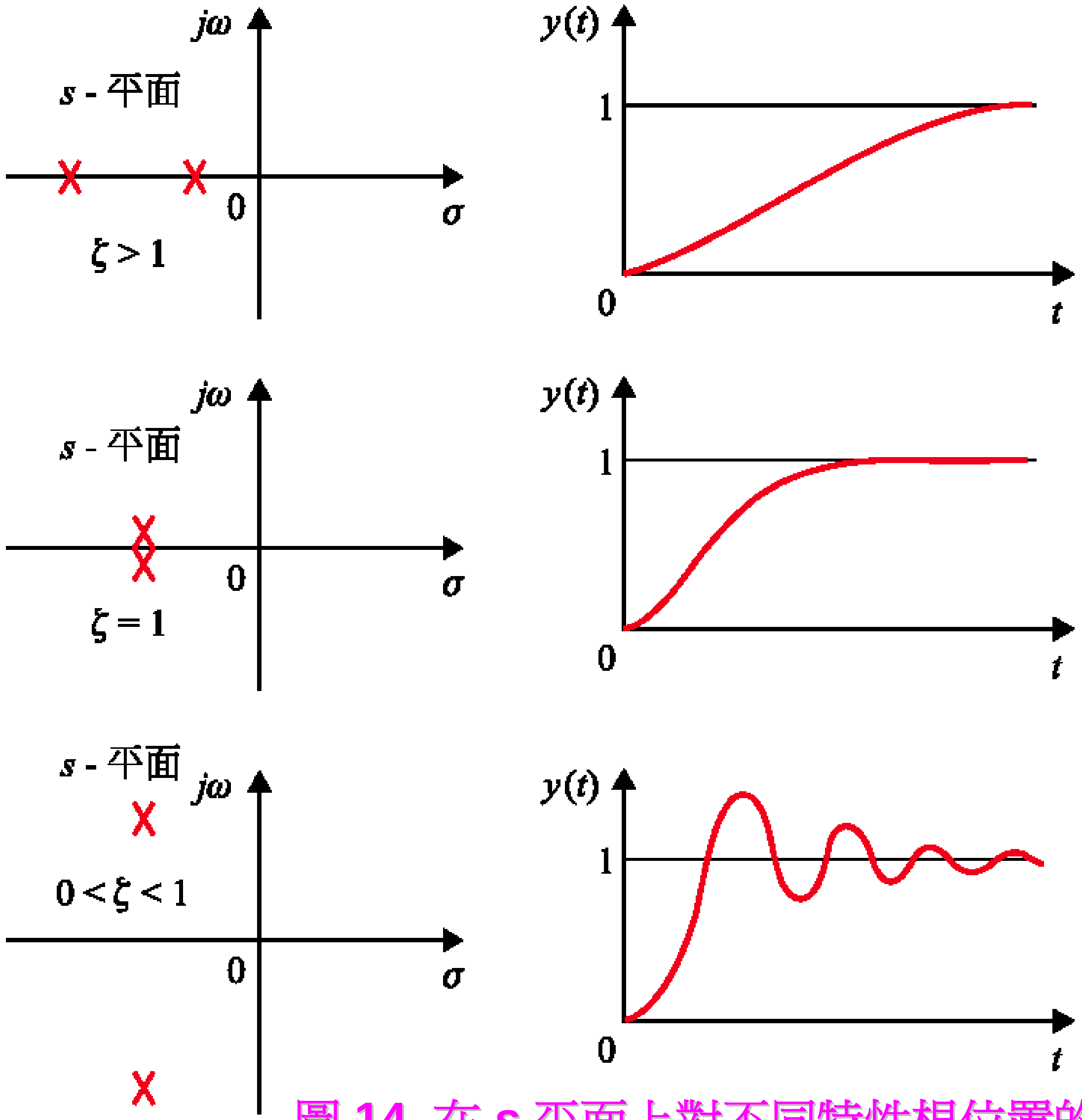


圖 14 在 s 平面上對不同特性根位置的步階響應比較

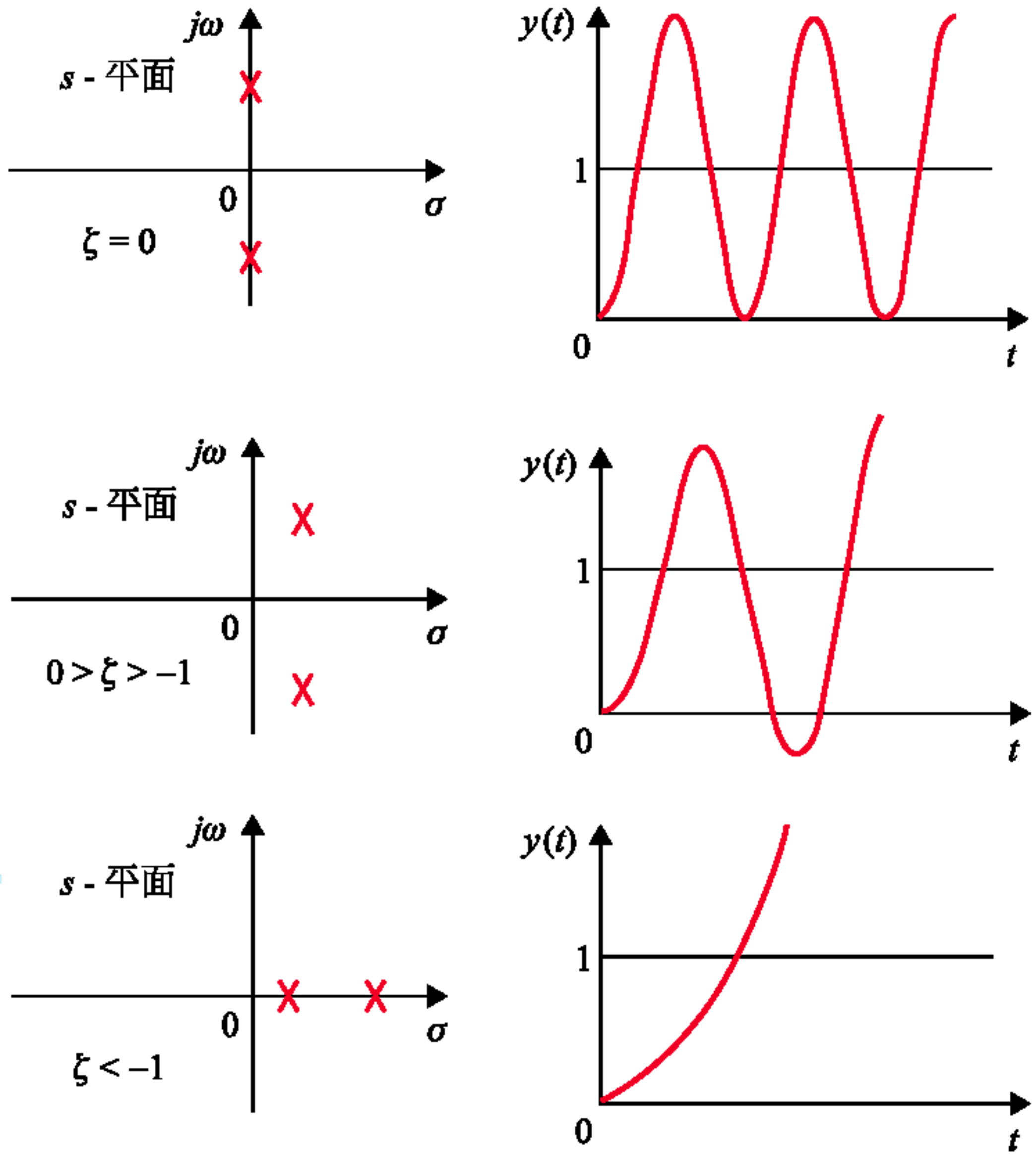


圖 15 在 s 平面上對不同特性根位置的步階響應比較

•最大超越量

1. 阻尼比和總超越量之間的確實關係：

1) 對 上 式微分並設結果爲零：

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left[\zeta \sin(\omega t + \theta) - \sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega t + \theta)\right] \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t \qquad t \geq 0$$

2) 令 ***dy(t)/dt* =0**，可得 ***t* = ∞** 時之解爲

$$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{n\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

只有 $\zeta \geq 1$ 的情形，***y*(*t*)** 的最大值才會發生在 ***t* = ∞**。

3) 步階響應的第一個最大值是出現在 ***n* = 1**。因此，最大超越量發生的時間爲

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

時間 t_{max} 爲 ζ 和 ω_n 之函數。

♣ 當 ***n*** 爲奇數值，即 ***n* = 1，3，5**，…，時，則有超越量出現。當 ***n*** 爲偶數值時，則有欠過度出現。

♣ 雖然 $\zeta \neq 0$ 的單位步階響應並非週期性，但響應的最大值和最小值是以週期性出現，如圖 16 所示。

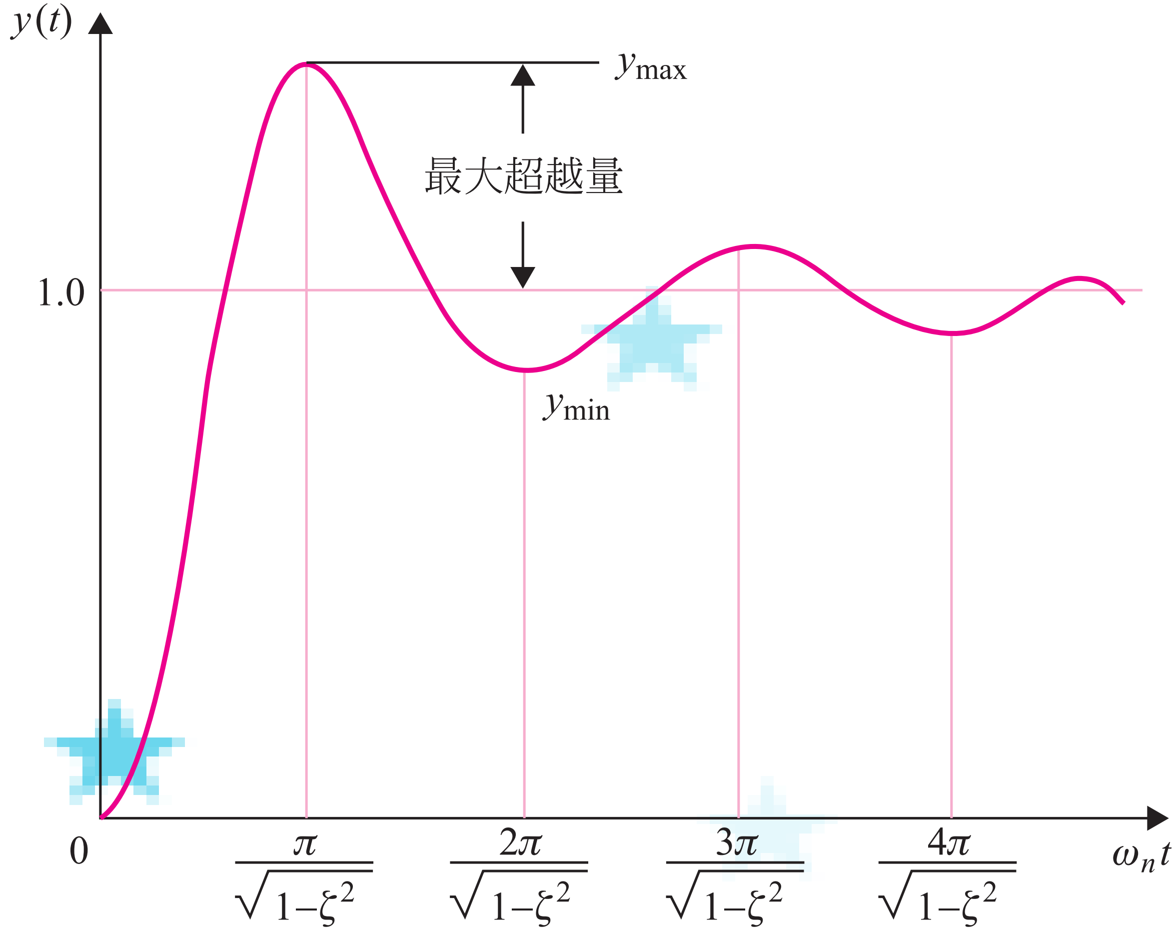


圖16 單位步階響應的最大值和最小值以週期性方式出現

2. 超越量和欠過度的幅度：

$$y(t)\big|_{\max\ 或\ \min} = 1 - \frac{e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(n\pi+\theta) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$y(t)\big|_{\max\ 或\ \min} = 1 + (-1)^{n-1} e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

1) 令 **(7-108)** 式的 $\boldsymbol{n = 1}$ 即可求得最大超越量：

$$最大超越量 = y_{\max} - 1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

最大超越量百分比為

$$最大超越量百分比 = 100\,e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

2) (7-109) 式為標準二階系統步階響應的最大超越量，其為阻尼比 ζ 之函數。

3) 最大超越量和阻尼比的關係如 **圖 17**。

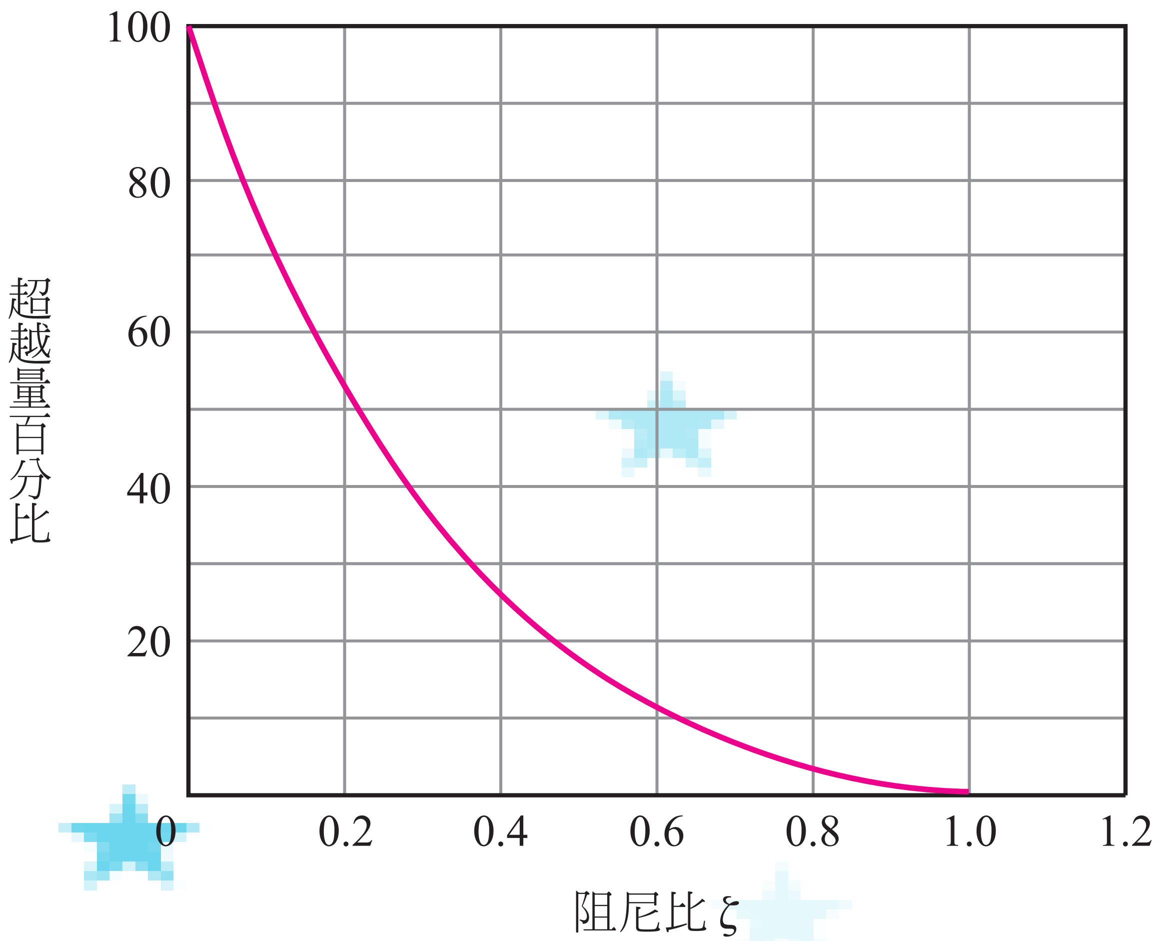


圖 17 標準二階系統步階響應的超越量百分比為阻尼比的函數