



線性代數 *Linear Algebra*

郭姿君

清雲科技大學電機系

第三章 行列式及特徵值

@ 行列式之介紹

@ 行列式之性質

@ 行列式、反矩陣及線性方程式系統

@ 特徵值與特徵向量

3.1 行列式之介紹

1. 試求下列各 2×2 矩陣之行列式值。

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

【解答】

$$(a) \quad 2 \times 5 - 1 \times 3 = 7$$

$$(c) \quad 4 \times 3 - 1 \times (-2) = 14$$

3.1 行列式之介紹

3. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ ，試求下列指定之餘因子及子行列式。

- (a) M_{11} 及 C_{11} (b) M_{21} 及 C_{21}
(c) M_{23} 及 C_{23} (d) M_{33} 及 C_{33}

【解答】

(a)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1 \times (-6) = -6$$

(b)

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 - (-3) = -5$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1) \times (-5) = 5$$

3.1 行列式之介紹

【解答】

(c)

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 14 = -13$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1) \times (-13) = 13$$

(d)

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 10 = -10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1 \times (-10) = -10$$

3.1 行列式之介紹

7. 試利用(1)第一列之餘因子展開及(2)對角線法，求解下列各矩陣之行列式值。

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 8 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

【解答】

(a) (1) 第一列之餘因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 8 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 7 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-1 + 12) + 7(48 + 5) = 393$$

3.1 行列式之介紹

(2) 對角線法

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 8 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (-2) + 0 + 336 - (-35) - 0 - (-24) = 393$$

(b)(1) 第一列之餘因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \times 1 \times (-2) + (-1) \times (-1) \times 2 + 3 \times 1 \times 4 = 10$$

(2) 對角線法

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + (-2) + 12 - 0 - (-4) - 4 = 10$$

3.1 行列式之介紹

11. 試利用計算量最少之方式，求解下列各矩陣之行列式值。

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -3 & 8 & 4 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 7 & -8 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

【解答】

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -3 & 8 & 4 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times (-2) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ = -8 \times (16 + 15) = -248$$

3.1 行列式之介紹

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-3) \times (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} \\ = -12 \times (-7 - 10) = 204$$

(c)

$$\begin{vmatrix} 9 & 3 & 7 & -8 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ = -3 \times (0 + 8 + (-2) - 0 - 12 - 1) = 21$$

3.1 行列式之介紹

12. 試求解下列方程式之x值。

$$\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = 3$$

【解答】

$$(x+1)(x-2) - (x)(3) = 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 - 3x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

3.2 行列式之性質

1. 試以在單行或列創造0的方式簡化行列式，其後再以展開該行或列之方式計算行列式值。

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

【解答】

(a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times (1-2) = -5$$

利用矩陣的特性 $\therefore \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$

3.2 行列式之性質

3. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，則 $|A|$ 可由餘因子展開而得 $|A| = -2$ ，利用此結果及行列式性質，計算下列矩陣之行列式值。

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -10 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

【解答】

(a) 此矩陣的第三列是A矩陣的2倍，因此該矩陣的行列式為 $2 \times (-2) = -4$

(b) 此矩陣為A矩陣的第一列與第二列互換後得到的，因此該矩陣的行列式為2

(c) 此矩陣為A矩陣的第一列乘以2倍加到第二列後得到的，因此該矩陣的行列式為-2

3.2 行列式之性質

6. 下列矩陣均因特定行或列的性質而為奇異矩陣，試說明其原因。

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ -3 & 6 & -12 \end{bmatrix}$$

【解答】

(a) 第三列全為零

(b) 第二行與第三行一樣

(c) 第三列是第一列的-3倍

3.2 行列式之性質

8. 若 A 為一 2×2 矩陣，且 $|A| = 3$ ，試利用行列式性質求解下列行列式值。

- (a) $|2A|$ (b) $|3A^t|$ (c) $|A^2|$
(d) $|(A^t)^2|$ (e) $|(A^2)^t|$ (f) $|4A^{-1}|$

【解答】

$$(a) \quad |2A| = 2^2 \times |A| = 4 \times 3 = 12$$

$$(b) \quad |3A^t| = 3^2 \times |A| = 9 \times 3 = 27$$

$$(c) \quad |A^2| = |AA| = |A||A| = 3 \times 3 = 9$$

$$(d) \quad |(A^t)^2| = |(A^t)(A^t)| = |(A^t)||A^t| = |A||A| = 3 \times 3 = 9$$

$$(e) \quad |(A^2)^t| = |(AA)^t| = |A^t||A^t| = 3 \times 3 = 9$$

$$(f) \quad |4A^{-1}| = 4^2 |A^{-1}| = 16 \frac{1}{|A|} = \frac{16}{3}$$

3.2 行列式之性質

10. 若 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ ，且 $|A| = 3$ ，試求下列行列式值。

(a) $\begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} d & a & g \\ e & b & h \\ f & c & i \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} d & f & e \\ a & c & b \\ g & i & h \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$

3.2行列式之性質

【解答】

(a) 第一列與第二列對調，再第二列與第三列對調，所以行列式為 $-(-3)=3$

(b) 矩陣轉置後，第一行與第三行對調，所以行列式為 -3

(c) 第一列與第三列對調，第二行與第三行對調，所以行列式為 $-(-3)=3$

(d) 第三列為A矩陣第三列2倍，且第一列與第三列對調，所以行列式為
 $2 \times (-3) = -6$

3.2 行列式之性質

13. 試利用消去法求取下列 3×3 行列式之值。

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -2 & -3 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

【解答】

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R1+R3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{32}A_{32} = 1 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - (-2)) = -4$$
$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -2 & -3 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R1+R2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 12 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = a_{23}A_{23} = 12 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$
$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -2 & -3 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

1. 試利用行列式值判斷下列矩陣是否有反矩陣(不須計算反矩陣)。

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

【解答】

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 7 = 5$ 因為行列式不等於零，所以反矩陣存在。

(c) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$ 因為行列式等於零，所以反矩陣不存在。

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

4. 試利用行列式值判斷下列矩陣是否有反矩陣(不須計算反矩陣)。

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ -3 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

【解答】

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ -3 & 5 & -9 \end{vmatrix} = -63 + 36 + 30 - (-63) - 36 - 30 = 0$$

因為行列式等於零，所以反矩陣不存在。

$$(c) \begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 14 + 0 + (-12) - 30 - (-1) - 0 = -27$$

因為行列式不等於零，所以反矩陣存在。

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

6. 試判斷下列矩陣是否有反矩陣；若然，試利用反矩陣公式求解其反矩陣。

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

【解答】

(a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 16 + 0 - 12 - 0 - 10 = -3$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ 8 & -9 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}}{3}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3-10 & -(0-8) & 0-4 \\ -(6-15) & (3-12) & -(5-8) \\ 4-3 & -(2-0) & 1-0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ 8 & -9 & -2 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-6) + 4 - (-4) - 0 - 6 = -4 \\ & \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0-6 & -(0+3) & -4-4 \\ -(0-2) & 0+1 & -(-2-2) \\ -6+4 & -(-3+2) & 4-4 \end{bmatrix}^T \\ & = \begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ & \therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}}{-4} \end{aligned}$$

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

8. 試應用克拉瑪法則求解下列方程式系統。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x_1 + 2x_2 = 8 \\ & 2x_1 + 5x_2 = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & x_1 + 3x_2 = 11 \\ & -2x_1 + x_2 = -1 \end{aligned}$$

【解答】

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 19 & 5 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 19 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5 - 4 = 1, |A_1| = 40 - 38 = 2, |A_2| = 19 - 16 = 3$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{3}{1} = 3$$

3.3行列式、反矩陣及線性方程式系統

【解答】

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 - (-6) = 7, A_1 = 11 - (-3) = 14, A_2 = -1 - (-22) = 21$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{14}{7} = 2$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{21}{7} = 3$$

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

10. 試應用克拉瑪法則求解下列方程式系統。

(a) $x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3$

$$2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 5$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7$$

(c) $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1$$

【解答】

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -12 + 81 + 8 - 72 - 9 + 12 = 8$$

$$|A_1| = -36 + 189 + 20 - 168 - (-30) - 27 = 8$$

$$|A_2| = -10 + 81 + 56 - 60 - (-12) - 63 = 16$$

$$|A_3| = 42 + 45 + 6 - 54 - 42 - 5 = -8$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{8}{8} = 1 \\ x_2 = \frac{16}{8} = 2 \\ x_3 = \frac{-8}{8} = -1 \end{cases}$$

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 8 + 4 + 36 + 6 - 32 + 6 = 28$$

$$|A_1| = 8 + 4 + 24 + 6 - 32 + 4 = 14$$

$$|A_2| = -8 + 8 + 9 - 6 - 8 + 12 = 7$$

$$|A_3| = -1 + 2 + 24 + 4 - 16 - 3 = 7$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{14}{28} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

14. 試由檢視係數矩陣之行列式值，判定下列方程式系統是否有唯一解。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -11 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad & 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 3 \\ & 7x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 1 \\ & 6x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \end{aligned}$$

【解答】

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -27 + 8 + 1 - (-6) - (-6) - 6 = -12$$

因為矩陣 A 的行列式不等於零，所以此線性系統有唯一解。

3.3 行列式、反矩陣及線性方程式系統

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & -8 & 6 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 7 & -8 & 6 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = -200 + 216 + 112 - (-192) - 210 - 210 = -100$$

因為矩陣A的行列式不等於零，所以此線性系統有唯一解。

3.4 特徵值與特徵向量

試求各 2×2 矩陣之特徵方程式、特徵值及對應之特徵向量。

1.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

【解答】

1.

$$\det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (5-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 6, 1$$

(1) 當 $\lambda = 6$

$$(A - 6I_2)x = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4x_2$$

$$\text{令 } x_2 = r \text{ 則 } x_1 = 4r \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.4 特徵值與特徵向量

(2) 當 $\lambda = 1$

$$(A - I_2)x = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2$$

$$\text{令 } x_2 = s \text{ 則 } x_1 = -s \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以特徵值為 6, 1, 特徵向量為 $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$