Control Systems

控制系統

- 清雲科技大學電機工程系
- Ya-Fu Peng
- February, 2009

內容

- 簡介
- 頻域模型
- 時域模型
- 時間響應
- 互聯子系統之簡化
- 穩定度
- 穩態誤差

Chapter 6　Stability

- 系統響應

$$y(t) = y_{forced}(t) + y_{natural}(t)$$

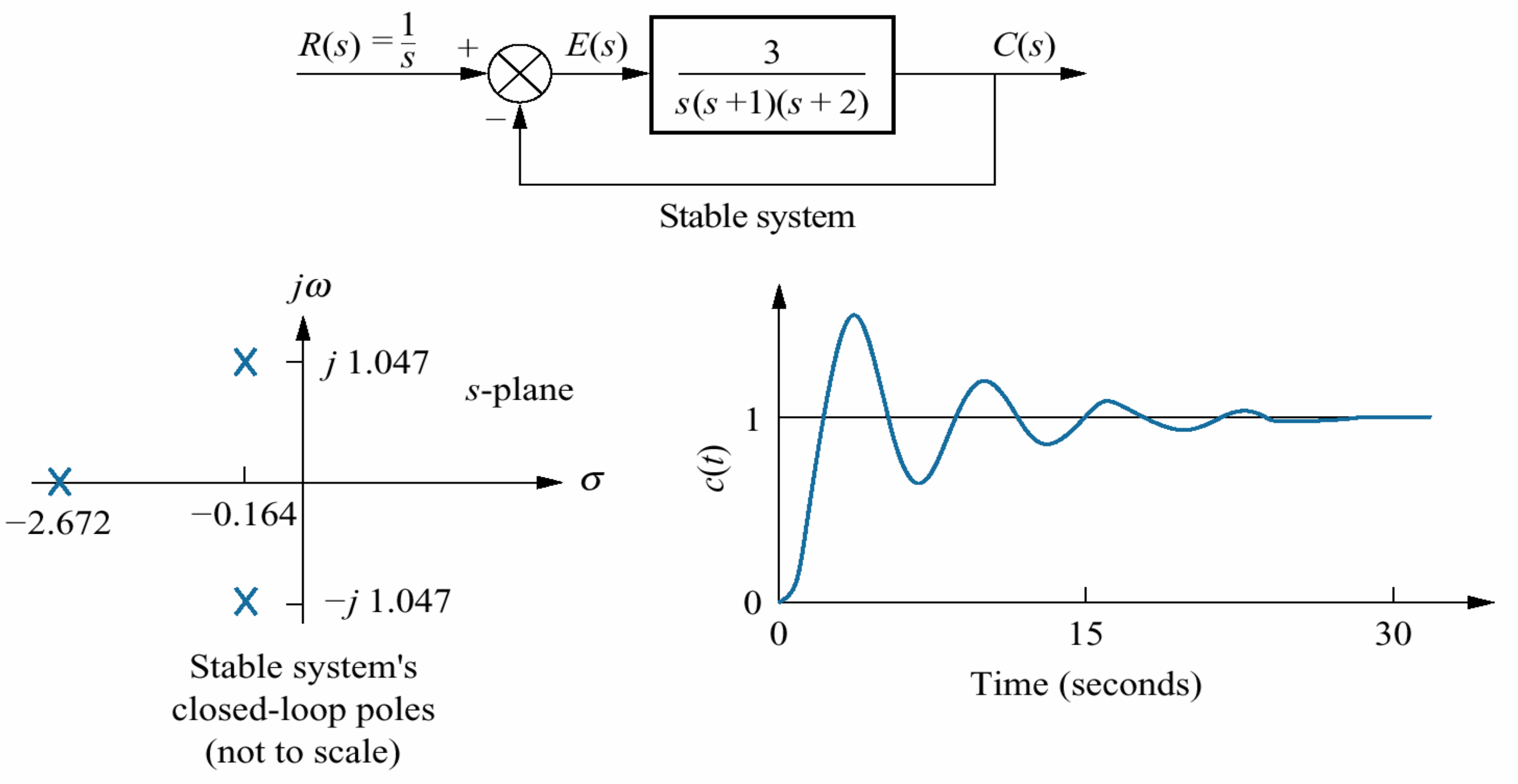
- 線性非時變系統穩定度的定義（以自然響應而論）
  - 假如當時間趨近於∞時，其自然響應趨近於0⇒系統為穩定。
  - 假如當時間趨近於∞時，其自然響應趨近於∞⇒系統為不穩定。
  - 若自然響應不衰減也不成長而維持一常數或震盪⇒系統為臨界穩定。

以全響應(BIBO)而論

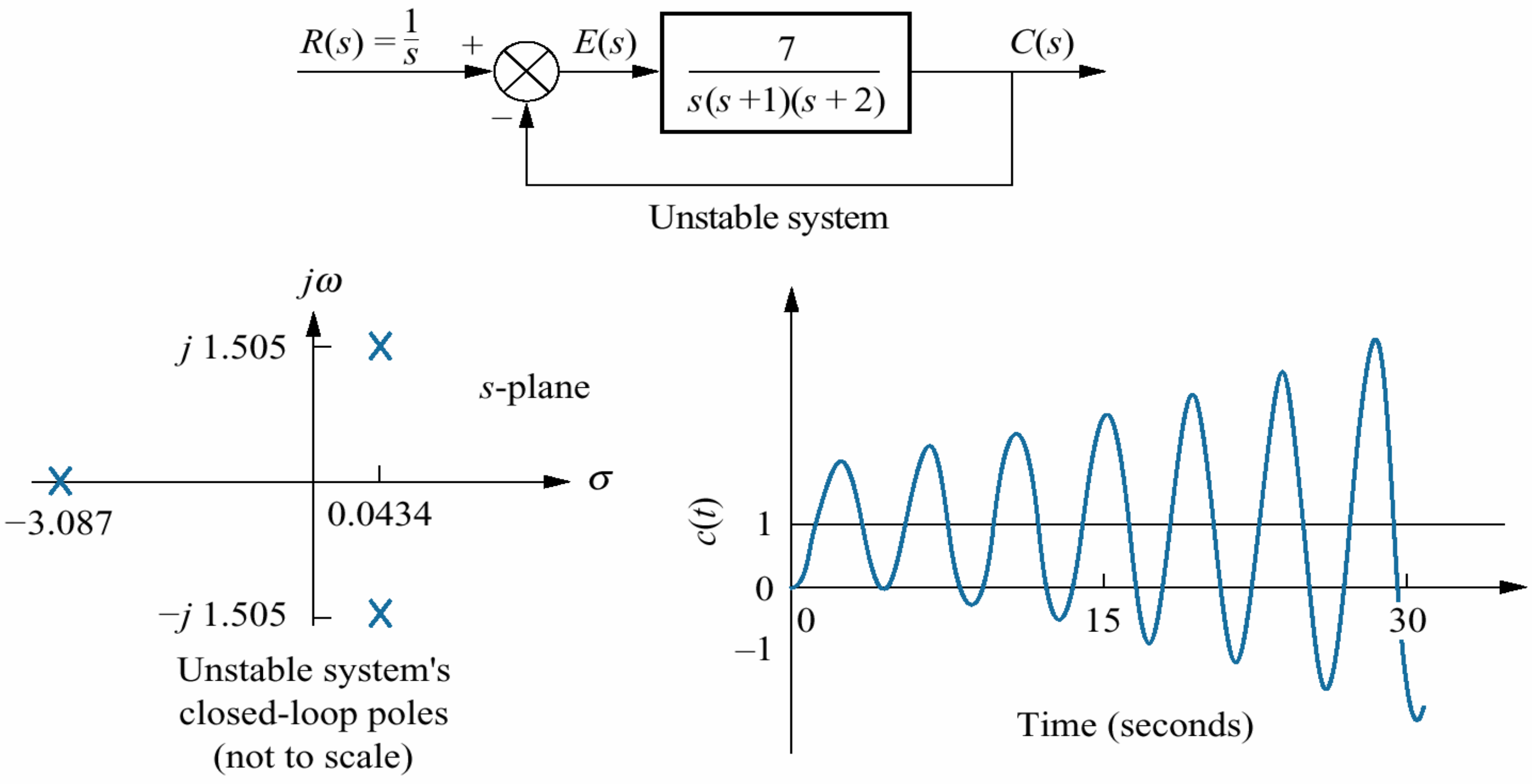
- 若每一個有範圍的輸入產生一有範圍的輸出，則系統為穩定。
- 若任何一個有範圍的輸入卻產生一無範圍的輸出，則系統為不穩定。
- 若閉回路系統極點是在S平面的左半平面且因此有一負實部，則系統為穩定。

- 不穩定系統其閉回路轉移函數至少有一極點座落在右半平面且/或一個以上的極點座落在虛軸上。
- 臨界穩定系統其閉回路轉移函數僅有一虛軸極點，而其他極點位在左半平面上。

Closed-loop poles and response-stable system



Closed-loop poles and response- unstable system



(b)

羅斯-赫維滋準則(Routh-Hurwitz Criterion BIBO)

- 判斷極點位置
- 步驟　：

1. 產生資料表格—羅斯表。
2. 解析羅斯表以得知有多少個閉回路極點在左半平面上。

- 決定多項式之右半面(RHP)及虛軸(IA)根數的一種數值程式。

建立羅斯表

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots\cdots\cdots a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \quad c_1 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \quad c_2 = \frac{-\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$$

EX: $P(s) = 2s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 6$

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 2 & 5 & 6 \\
s^3 & 3 & 2 & \\
s^2 & \dfrac{11}{3} & 6 & \\
s^1 & -\dfrac{32}{11} & & \\
s^0 & 6 & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ 2 RHP

$\Rightarrow$ System unstable

- $P(s)$的RHP(右半平面)根數為羅斯表最左行元素的變號個數。

EX: $G(s) = \dfrac{1000}{(s+2)(s+3)(s+5)}$

Sol:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$= \frac{1000}{s^3 + 10s^2 + 31s + 1030}$$

$$\therefore q(s) = s^3 + 10s^2 + 31s + 1030$$

s^3	1	31
s^2	10	1030
s^1	-72	
s^0	103	

$\Rightarrow$ 2 RHP

$\Rightarrow$ System unstable

EX: $q(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 1$

Sol:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 1 \\
s^3 & 2 & 4 & \\
s^2 & 1 & 1 & \\
s^1 & 2 & & \\
s^0 & 1 & \Rightarrow 0\ \text{RHP} &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ System Stable

發生某列的第一個元素為零(非整列全為零)

EX: $T(s) = \dfrac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$

Sol:

$$\therefore q(s) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3$$

s^5	1	3	5
s^4	2	6	3
s^3	0	7	
s^2			
s^1			
s^0			

令 $s = \dfrac{1}{d}$

$$\Rightarrow q(d) = 3d^5 + 5d^4 + 6d^3 + 3d^2 + 4d + 1$$

$$\begin{array}{c|ccc}
d^5 & 3 & 6 & 2 \\
d^4 & 5 & 3 & 1 \\
d^3 & 3 & 1 & \\
d^2 & 4 & 3 & \\
d^1 & -5 & & \\
d^0 & 3 & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 2 RHP

$\Rightarrow$ System unstable

發生整列為零的情況

EX: $q(s) = s^5 + 2s^4 + 8s^3 + 11s^2 + 16s + 12$

Sol:

s^5	1	8	16
s^4	2	11	12
s^3	1	4	
s^2	1	4	
s^1	0	0	
s^0			

➢作法：

1.以整列為零之前一列為輔助方程式$A(s)$。

2.將此輔助方程式微分，以其係數來取代零列。

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 8 & 16 \\
s^4 & 2 & 11 & 12 \\
s^3 & 1 & 4 & \\
s^2 & 1 & 4 & \Rightarrow A(s) = s^2 + 4 \Rightarrow s^2 + 4 = 0 \Rightarrow s = \pm j2 \\
s^1 & 2 & & \Rightarrow \dfrac{dA(s)}{ds} = 2s \\
s^0 & 4 & &
\end{array}
$$

➢結果：0 RHP，其中有兩根落在虛軸上($s=j2,-2j$)，其他三根落在LHP。

EX: $T(s) = \dfrac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$

Sol:

$$\therefore\ q(s) = s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 6 & 8 \\ s^4 & 1 & 6 & 8 \\ s^3 & 0 & 0 & \\ s^2 & & & \\ s^1 & & & \\ s^0 & & & \end{array}$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = \frac{d(s^4 + 6s^2 + 8)}{ds} = 4s^3 + 12s = 4(s^3 + 3s)$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 6 & 8 \\ s^4 & 1 & 6 & 8 \\ s^3 & 1 & 3 & \\ s^2 & 3 & 8 & \\ s^1 & 1 & & \\ s^0 & 8 & & \end{array}$$

➢結果：無變號，故 0 RHP，其中4 AI，1 LHP。

EX: $s^6 + s^5 + 5s^4 + s^3 + 2s^2 - 2s - 8$

Sol:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^6 & 1 & 5 & 2 & -8 \\
s^5 & 1 & 1 & -2 & \\
s^4 & 4 & 4 & -8 & \\
s^3 & 0 & 0 & & \\
s^2 & & & & \\
s^1 & & & & \\
s^0 & & & &
\end{array}$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = \frac{d(4s^4 + 4s^2 - 8)}{ds} = 16s^3 + 8s$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^6 & 1 & 5 & 2 & -8 \\
s^5 & 1 & 1 & -2 & \\
s^4 & 4 & 4 & -8 & \\
s^3 & 16 & 8 & & \\
s^2 & 2 & -8 & & \\
s^1 & 72 & & & \\
s^0 & -8 & & &
\end{array}$$

$\therefore$

- 結果： 1 RHP，2 AI，3 LHP。

試求系統穩定時可調參數**k**的範圍為何?

EX: $$T(s) = \frac{4}{s^2 + 2s + k}$$

Sol:

$$\text{if } k = 0 \Rightarrow s(s+2) \qquad s = 0 \Rightarrow \text{邊際穩定}$$

$$\text{if } k < 0 \Rightarrow \text{不穩定}$$

EX: $q(s) = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 2s + k$

s^4	1	4	k
s^3	2	2	
s^2	3	k	
s^1	$\frac{6-2k}{3}$		
s^0	k		

$$\text{if no RHP} \Rightarrow \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\dfrac{6-2k}{3} > 0\\ k > 0\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow 6 - 2k > 0 \quad k < 3$$

$$\Rightarrow 3 > k > 0$$

$$\text{if } k = 3 \Rightarrow \text{零列} \Rightarrow \text{邊際穩定}$$

$$3s^2 + 3 = 0 \Rightarrow s = \pm j$$