工　程　經　濟

貨　幣　的　時　間　價　值

講員：周　富　得　博士

清雲科技大學工業工程與管理系

貨 幣 的 時 間 價 值

? 術語名詞
? 名義利率與實質利率的轉換
? 目前金額轉成未來總值
? 未來總值轉成目前金額
? 目前金額轉成等額年金
? 等額年金轉成目前金額
? 等額年金轉成未來總值
? 未來總值轉成等額年金
? 綜合應用

術 語 名 詞

? 本金：

1 原始的投資額或貸款金額

? 貨幣的時間價值：

1 當資金儲存在銀行時，經過一段時間之後，資金額度會隨著時間改變而增加，此稱之為貨幣具有時間價值

1 當資金投資在某項業務時，經過數年賺取利潤之後，其資金額度會隨著時間改變而增加，此稱之為貨幣具有時間價值

術 語 名 詞

? 利息：

- 1 貨幣的時間價值即為利息
- 1 利息＝累積的總金額－原來的投資金額
- 1 利息＝目前所欠的總金額－原來的貸款金額

? 利率：

- 1 單位時間所增加的利息與原始金額間的百分比

$$利率 = \frac{單位時間所增加的利息}{原始金額} \times 100\%$$

利 息 與 利 率 之 範 例

李先生於年初存款 $200,000 元，而在年底回收現金 $208,000 元，試計算利息與利率各為何？

利 息 與 利 率 之 範 例

解：

$$\text{利息} = \$208{,}000 - \$200{,}000 = \$8{,}000\ \text{元}$$

$$\text{利率} = \frac{\$8{,}000}{\$200{,}000} \times 100\% = 4\%$$

利 息 與 利 率 之 範 例

李先生向銀行貸款 $200,000 元，約定一年後加計 12% 利息償還，試計算一年後李先生該償還多少金額？

利 息 與 利 率 之 範 例

解：

利息 ＝ $200,000 × 12% ＝ $24,000 元

償還金額 ＝ 本金 ＋ 利息

＝ $200,000 ＋ $24,000

＝ $224,000 元

術 語 名 詞

? 單利：

1 利息產生之後不再併入本金來加計利息

1 利息＝本金×利率×期數

? 複利：

1 利息產生之後必須再併入本金，一起來加計利息，亦即利上滾利

單利之範例

張先生三年前向您借款 $100,000 元，約定年利率為 12 % 採單利計算，試問張先生目前應該償付多少金額給您？

單　利　之　範　例

解：

利息＝本金 ×利率 ×期數

＝ $100,000 ×12 % ×3

＝ $36,000

償付總金額＝本金＋利息

＝ $100,000 ＋ $36,000

＝ $136,000

複利之範例

張先生三年前向您借款 $100,000 元，約定年利率為 12 % 採複利計算，試問張先生目前應該償付多少金額給您？

複利之範例

解：

第一年利息＝ $100,000 ×12 %＝ $12,000

第一年底積欠總金額＝ $112,000

第二年利息＝ $112,000 ×12 %＝ $13,440

第二年底積欠總金額＝ $125,440

第三年利息＝ $125,440 ×12 %

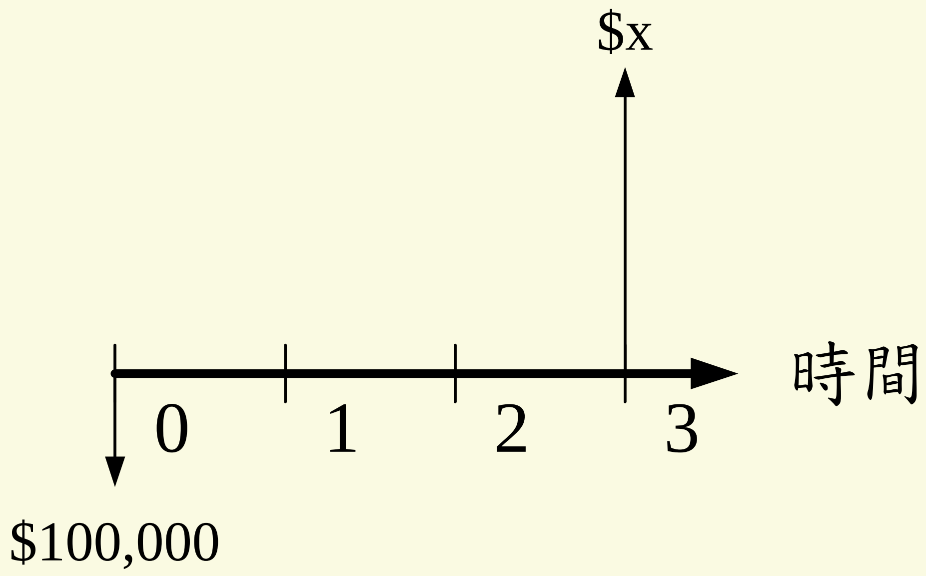
＝ $15,052.8

第三年底積欠總金額＝ $140,492.8

目前應該償付總金額＝ $140,492.8

複　利　之　範　例

解：



$$x = \$100{,}000 \times (1.00 + 12\%)^3$$

$$x = \$140{,}492.8$$

術　語　名　詞

等值：

- 1 在特定的利率下，兩個或多個不同時間點上所對等的貨幣金額，亦即在不同的時間點上不同的金額具有相同的經濟價值
- 1 會受到利率、時間、利率計息方式以及付款方式而影響到金額的數值
- 1 例如：假使年利率為 6.75% ，則今天的 $10,000 元將等值於一年後的 $10,675 元

等　值　之　範　例

周先生向銀行貸款 $500,000 元，採取固定年利率 15% ，期間 5 年。銀行提出四種償還方案供周先生選擇：

- 1 方案一：每年不償付利息或本金，直到第 5 年才一次全部償付完畢
- 1 方案二：每年只償付利息部分，而本金則在第 5 年才償付
- 1 方案三：每年償付 $100,000 元的本金，以及當年度的利息
- 1 方案四：每一年固定償付一定之相同金額

等 值 之 範 例 — 方 案 一

每年不償付利息或本金，直到第 5 年才一次全部償付 $1,005,678.6 元完畢

年別	每年利息	年終積欠金額	每年償付金額	償付後之金額
1	$75,000.0	$575,000.0	$0.0	$575,000.0
2	$86,250.0	$661,250.0	$0.0	$661,250.0
3	$99,187.5	$760,437.5	$0.0	$760,437.5
4	$114,065.6	$874,503.1	$0.0	$874,503.1
5	$131,175.5	$1,005,678.6	$1,005,678.6	$0.0

等值之範例—方案二

前面四年，每年只償付利息 $75,000 元，第五年除了需要償付利息 $75,000 元之外，尚且負擔本金部分 $500,000 元，因此總共要償付 $575,000 元

年別	每年利息	年終積欠金額	每年償付金額	償付後之金額
1	$75,000.0	$575,000.0	$75,000.0	$500,000.0
2	$75,000.0	$575,000.0	$75,000.0	$500,000.0
3	$75,000.0	$575,000.0	$75,000.0	$500,000.0
4	$75,000.0	$575,000.0	$75,000.0	$500,000.0
5	$75,000.0	$575,000.0	$575,000.0	$0.0

等值之範例—方案三

每年除了分期償付 $100,000 元的本金之外，還要償付當年度的利息

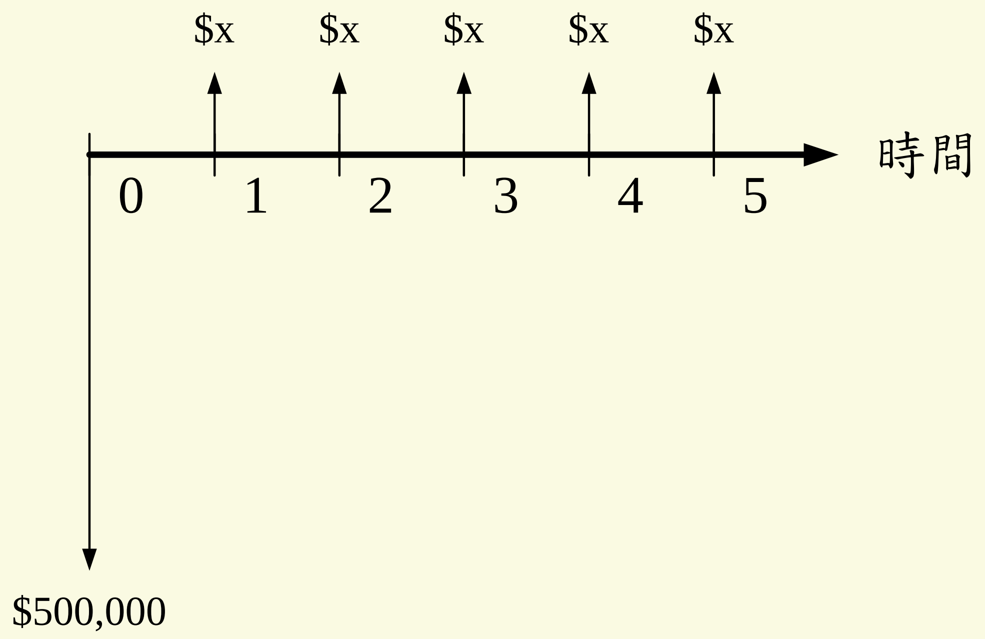
年別	每年利息	年終積欠金額	每年償付金額	償付後之金額
1	$75,000.0	$575,000.0	$175,000.0	$400,000.0
2	$60,000.0	$460,000.0	$160,000.0	$300,000.0
3	$45,000.0	$345,000.0	$145,000.0	$200,000.0
4	$30,000.0	$230,000.0	$130,000.0	$100,000.0
5	$15,000.0	$115,000.0	$115,000.0	$0.0

等 值 之 範 例 — 方 案 四

每一年固定償付 $149,157.8 元

年別	每年利息	年終積欠金額	每年償付金額	償付後之金額
1	$75,000.0	$575,000.0	$149,157.8	$425,842.2
2	$63,876.3	$489,718.5	$149,157.8	$340,560.7
3	$51,084.1	$391,644.8	$149,157.8	$242,487.0
4	$36,373.1	$278,860.1	$149,157.8	$129,702.3
5	$19,455.3	$149,157.8	$149,157.8	$0.0

等 值 之 範 例 — 方 案 四



$$\$500{,}000\times(1.15)^{5}=x\cdot[1+(1.15)+(1.15)^{2}+(1.15)^{3}+(1.15)^{4}]$$

?每一種方案對於銀行而言都可以接受，亦即事先回收的資金可以再加以利用

名義利率與實質利率的轉換

名義利率：i_n

實質期利率：i

實質年利率：i_e

每年複利的次數：M

$$i = \frac{i_n}{M}$$

$$i_e = (1+i)^M - 1$$

名義利率與實質利率的轉換

範例：

某家銀行信用卡合約上規定：倘若客戶未能於每個月結帳繳款日如期償付簽帳之款項時，則客戶必須額外支付循環利息（約定年利率18%），

試問：

(1).每個月的實質期利率為何？

(2).每年的實質年利率為何？

名義利率與實質利率的轉換

解：

每月實質期利率 $i = \dfrac{i_n}{M} = \dfrac{18\%}{12} = 1.5\%$

每年實質年利率 $i_e = (1+i)^M - 1 = (1+1.5\%)^{12} - 1$

$= 19.562\%$

名義利率與實質利率的轉換

範例：

某家銀行的牌告利率為12%，分別以每季、每月、每日計息一次的方式，試問實質期利率、實質年利率分別為何？

名義利率與實質利率的轉換

解：

每季計息一次

每季實質期利率 $i = \dfrac{i_n}{M} = \dfrac{12\%}{4} = 3.0\%$

每年實質年利率 $i_e = (1+i)^M - 1 = (1+3.0\%)^4 - 1$

$= 12.551\%$

每月計息一次

每月實質期利率 $i = \dfrac{i_n}{M} = \dfrac{12\%}{12} = 1.0\%$

每年實質年利率 $i_e = (1+i)^M - 1 = (1+1.0\%)^{12} - 1$

$= 12.683\%$

名義利率與實質利率的轉換

每日計息一次

每日實質期利率 $i = \frac{i_n}{M} = \frac{12\%}{365} = 0.032877\%$

每年實質年利率 $i_e = (1+i)^M - 1 = (1+\frac{12\%}{365})^{365} - 1$

$= 12.74746\%$

目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值

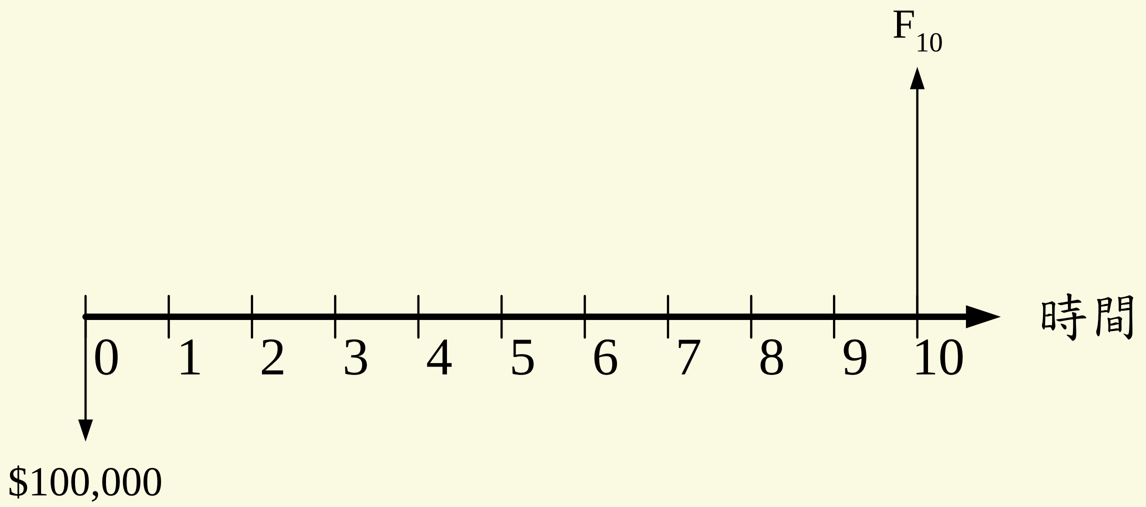
周先生目前手頭上有現金 $100,000 元，他想購買年利率 8 % 的十年期政府公債，試問十年後周先生一共可以取回多少金額？

目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值

解：

年度	本金	利息	所得金額
1	$100,000.0	$8,000.0	$108,000.0
2	$108,000.0	$8,640.0	$116,640.0
3	$116,640.0	$9,331.2	$125,971.2
4	$125,971.2	$10,077.7	$136,048.9
5	$136,048.9	$10,883.9	$146,932.8
6	$146,932.8	$11,754.6	$158,687.4
7	$158,687.4	$12,695.0	$171,382.4
8	$171,382.4	$13,710.6	$185,093.0
9	$185,093.0	$14,807.4	$199,900.5
10	$199,900.5	$15,992.0	$215,892.5

目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值



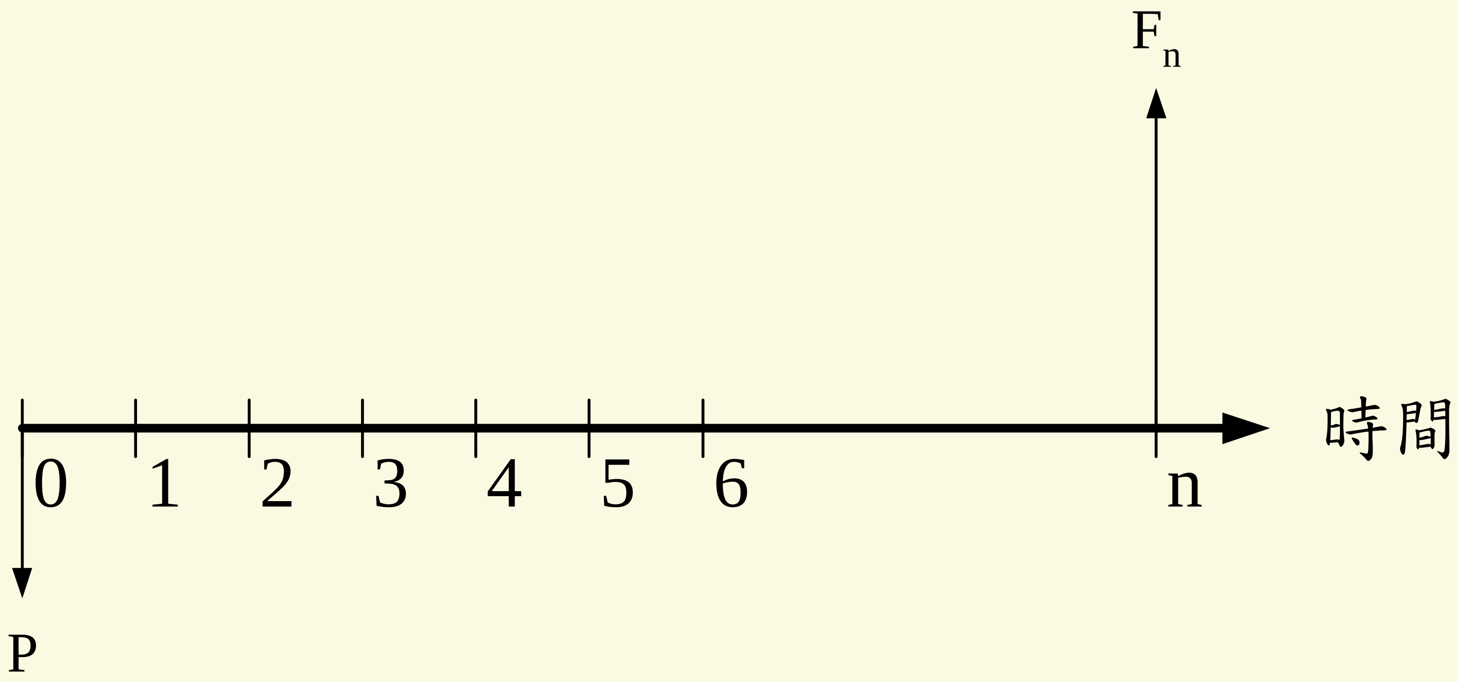
$$(\text{期末本金}+\text{利息})=\text{本金}\times(1+\text{利率})^{\text{期數}}$$

$$=\$100{,}000\times(1+8\%)^{10}$$

$$=\$215{,}892.5$$

目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值

目前投資金額 P，年利率為 i



目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值

? 第一年年底所累積的總金額為 F_1

$$F_1 = 本金 + 本金 \times 利率$$
$$= P + P \cdot i = P(1+i)$$

? 第二年年底所累積的總金額為 F_2

$$F_2 = F_1 + F_1 \cdot i = F_1(1+i)$$
$$= P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$$

目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值

? 第三年年底所累積的總金額為 F_3

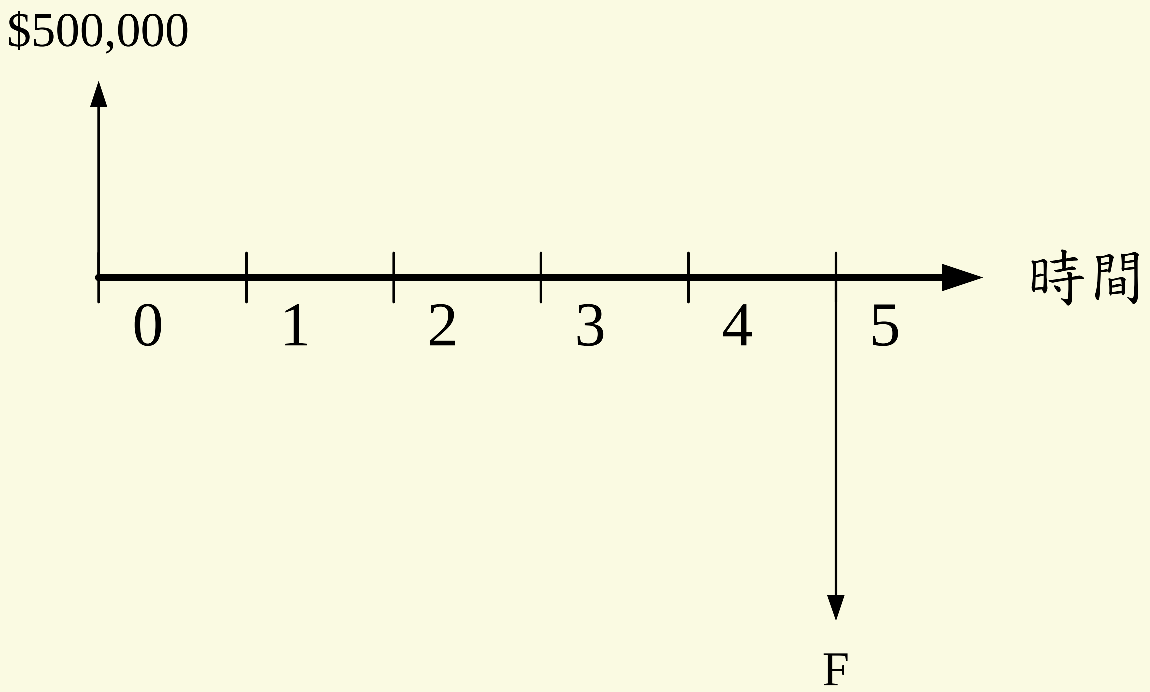
$$F_3 = F_2 + F_2 \cdot i = F_2(1+i)$$
$$= P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$$

? 運用數學歸納法可以得到第 n 年年底所累積的總金額為 F_n

$$F_n = P(1+i)^n$$

目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值

蘇小姐向銀行貸款五十萬元，約定五年後一次償還本息，採固定年利率 12 % ，試問蘇小姐在五年後需要償還多少金額？



目前金額轉成未來總值

解：

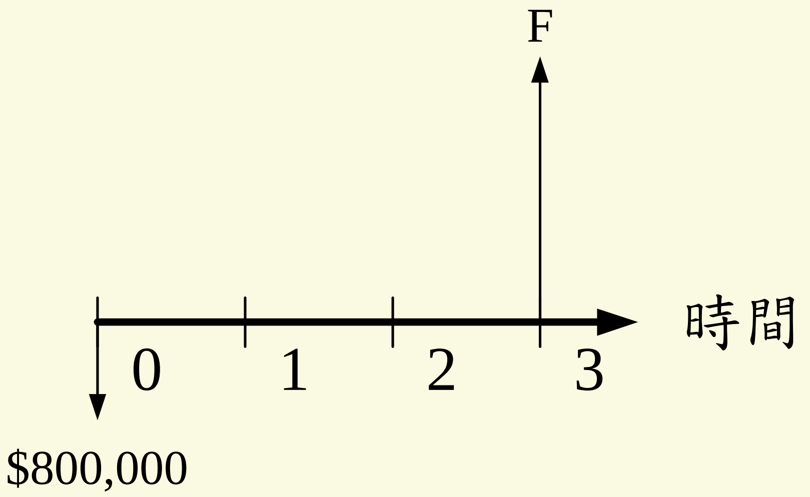
$$期末償還總金額 = 本金 \times (1+利率)^{期數}$$

$$= \$500{,}000 \times (1+12\%)^{5}$$

$$= \$881{,}170.8$$

目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值

張老闆販賣一批貨物給李先生，言明現金交易價格為八十萬元，如果李先生執意要開立三年期的支票來支付的話，在平均年利率8％的情況下，試問張老闆會要求李先生在支票上開立多少金額的款項？



目 前 金 額 轉 成 未 來 總 值

解：

$$P = \$800{,}000$$

$$i = 8\%$$

$$F = P \times (1+i)^3$$

$$= \$800{,}000 \times (1+8\%)^3$$

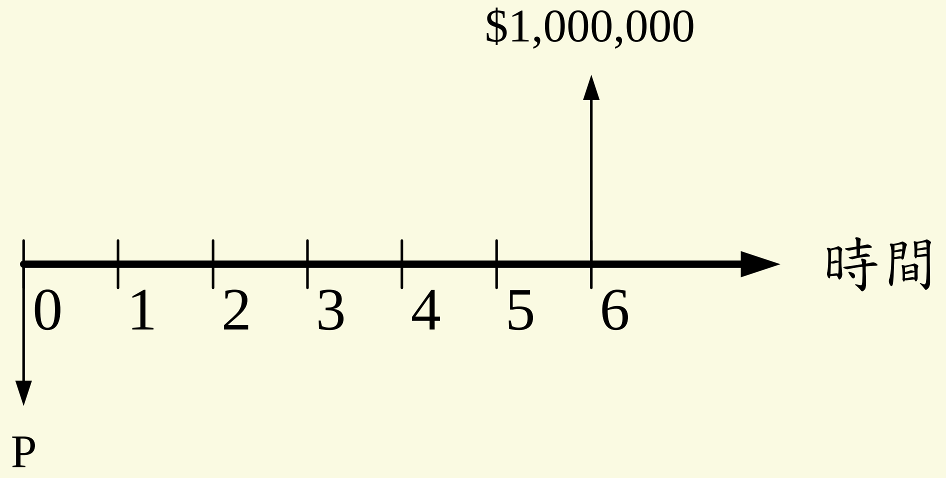
$$= \$1{,}007{,}769.6$$

未來金額轉成目前金額

林先生想要儲存一筆結婚基金，他預計六年後要結婚，假設平均年利率為8％，試問林先生目前應該到銀行定存多少金額的款項，方能達到結婚時擁有一百萬元的結婚基金？

未來金額轉成目前金額

解：



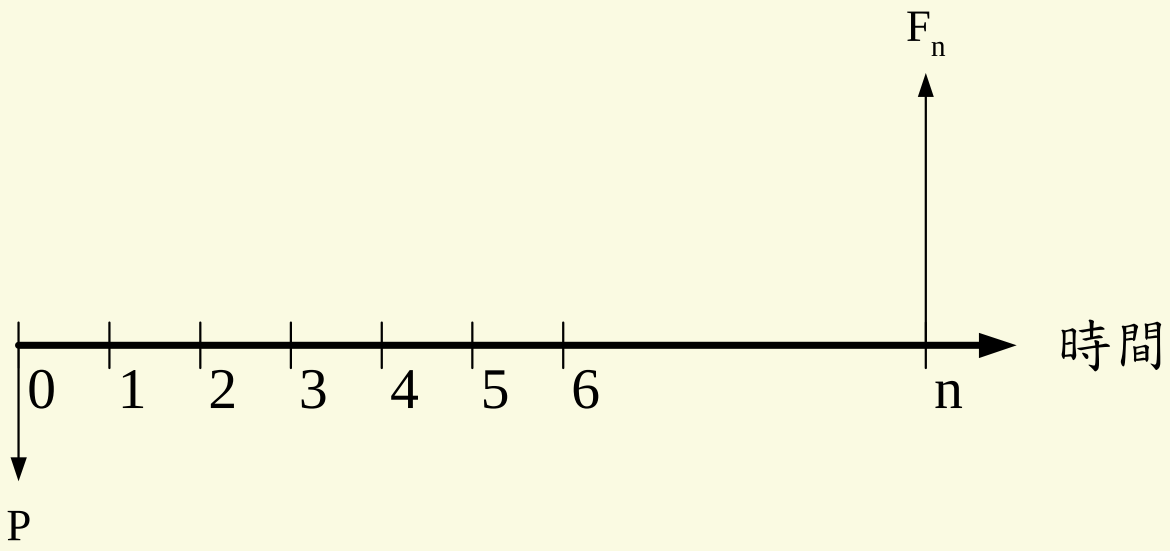
$$期末累積總金額=本金\times(1+利率)^{期數}$$

$$\$1,000,000 = P\times(1+8\%)^6$$

$$P=\frac{\$1,000,000}{(1+8\%)^6}=\$630,169.6$$

未來金額轉成目前金額

- 目前投資金額 P，年利率為 i



- 第一年年底所累積的總金額為 F_1

$$F_1 = 本金 + 本金 \times 利率$$
$$= P + P \cdot i = P(1+i)$$

未 來 金 額 轉 成 目 前 金 額

? 第二年年底所累積的總金額為 F_2

$$F_2 = F_1 + F_1 \cdot i = F_1(1+i)$$
$$= P(1+i)(1+i) = P(1+i)^2$$

? 第三年年底所累積的總金額為 F_3

$$F_3 = F_2 + F_2 \cdot i = F_2(1+i)$$
$$= P(1+i)^2(1+i) = P(1+i)^3$$

未 來 金 額 轉 成 目 前 金 額

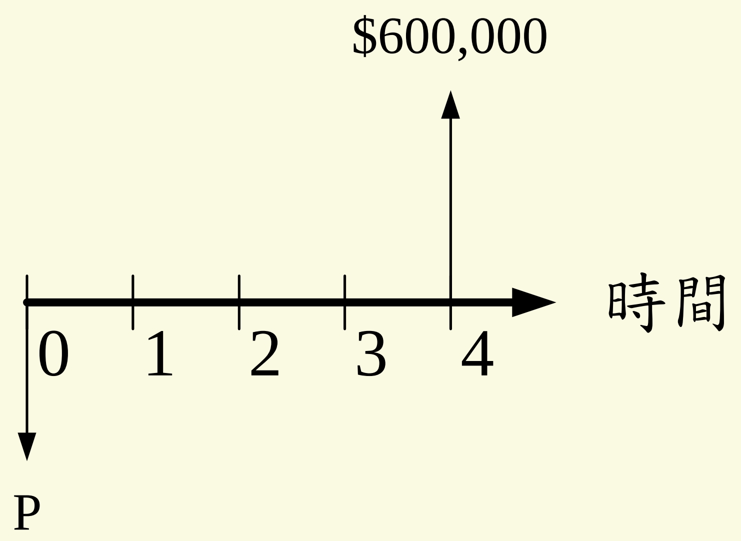
? 運用數學歸納法可以得到第 n 年年底所累積的總金額為 F_n

$$F_n = P(1+i)^n$$

$$P = \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

未 來 金 額 轉 成 目 前 金 額

康先生向國外公司採購機器設備一台，約定四年後交機驗收後以現金六十萬元一次付清，假設平均年利率為6%，試問康先生目前應該準備多少現金儲存在銀行定存，以便四年後來支付此項金額？



未 來 金 額 轉 成 目 前 金 額

解：

$$F = P(1+i)^n$$

$$\$600{,}000 = P(1+6\%)^4$$

$$P = \frac{\$600{,}000}{(1+6\%)^4} = \$475{,}256.2$$

未 來 金 額 轉 成 目 前 金 額

王小姐目前擁有一筆現金，假設銀行的平均年利率為 8 % 時，王小姐如果將此筆現金定存在銀行之內，試問要經過多少時間，此筆款項的金額會變成目前金額的兩倍？

未 來 金 額 轉 成 目 前 金 額

解：

目前金額 $= P$　　未來金額 $= F = 2P$

定存年利率 $= i = 8\%$　　假設時間 $= n$ 年

$$F = 2P = P(1+i)^n = P(1+8\%)^n$$

$2 = (1.08)^n$　兩邊取 log 值　$\log 2 = \log\left[(1.08)^n\right]$

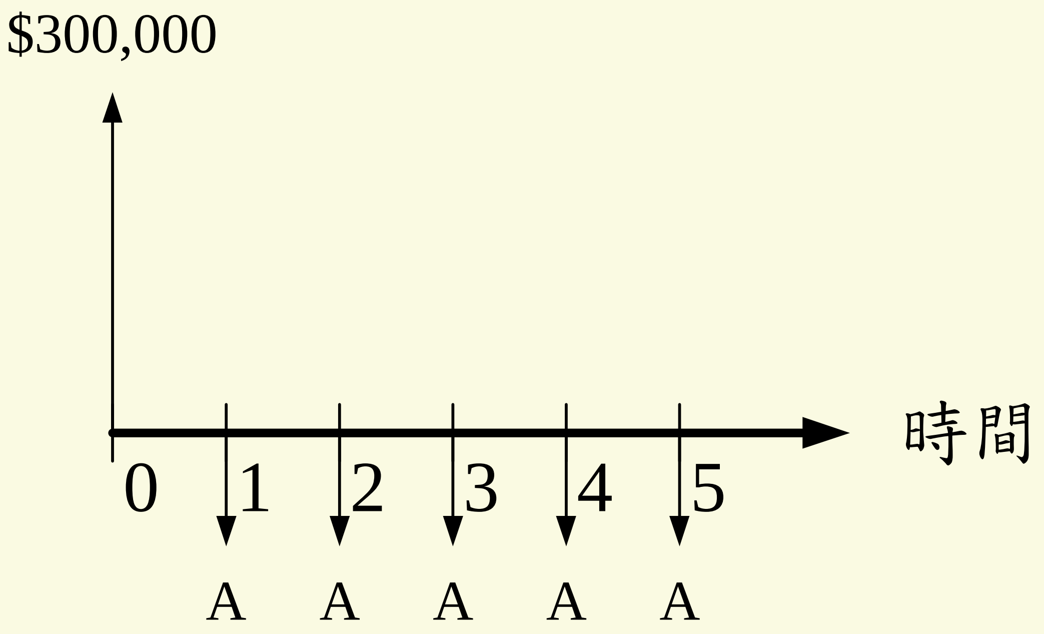
$$\log 2 = n \cdot \log 1.08$$

$$n = \frac{\log 2}{\log 1.08} = 9.006468342$$

大約為期九年

目前金額轉成等額年金

陳小姐向銀行貸款三十萬元，約定採用固定年利率 11 % 來計息，以五年等額方式償還，試問陳小姐每一年需要固定償還多少金額？



目 前 金 額 轉 成 等 額 年 金

解：

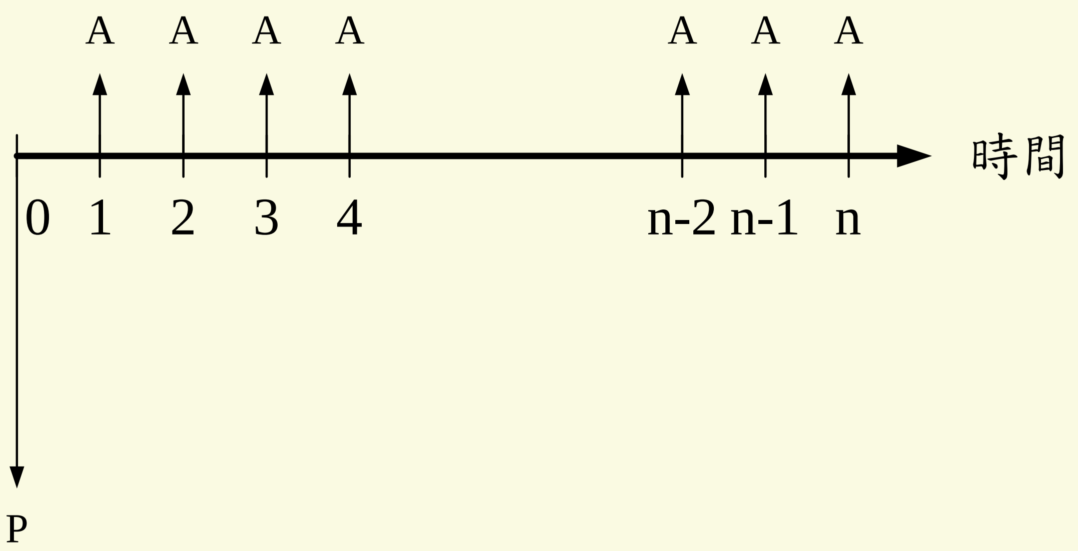
$$\$300{,}000=\frac{A}{(1+11\%)}+\frac{A}{(1+11\%)^2}+\frac{A}{(1+11\%)^3}+\frac{A}{(1+11\%)^4}+\frac{A}{(1+11\%)^5}$$

$$\$300{,}000=\frac{A\left[1+(1+11\%)+(1+11\%)^2+(1+11\%)^3+(1+11\%)^4\right]}{(1+11\%)^5}$$

$$\$300{,}000(1+11\%)^5=A\left[1+(1+11\%)+(1+11\%)^2+(1+11\%)^3+(1+11\%)^4\right]$$

$$A=\$81{,}171.1$$

目 前 金 額 轉 成 等 額 年 金



P 代表目前金額　　A 代表等額年金

i 代表年利率　　n 代表期數

$$P=\frac{A}{(1+i)}+\frac{A}{(1+i)^2}+\frac{A}{(1+i)^3}+\ldots\ldots+\frac{A}{(1+i)^{n-1}}+\frac{A}{(1+i)^n}$$

$$P(1+i)^n=A\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\ldots+(1+i)^2+(1+i)+1\right]$$

目前金額轉成等額年金

$$1+r+r^2+\ldots\ldots+r^{k-1}+r^k \qquad = C$$

$$r+r^2+\ldots\ldots+r^{k-1}+r^k+r^{k+1}=r\cdot C$$

$$r^{k+1}-1=r\cdot C-C \qquad\qquad C(r-1)=r^{k+1}-1$$

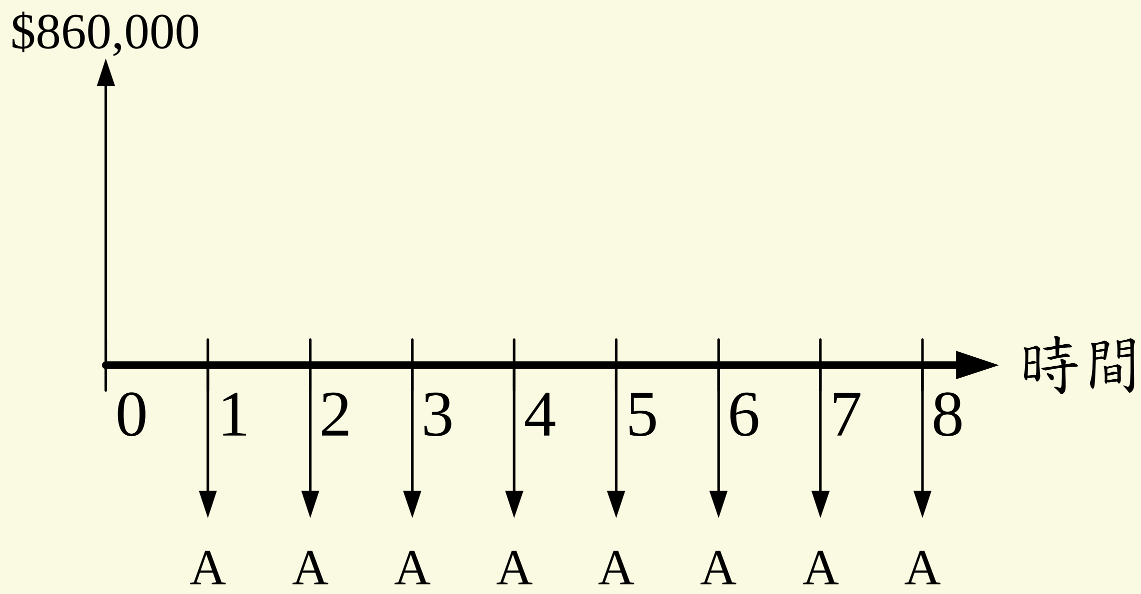
$$C=\frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

$$P(1+i)^n=A\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}\right]=A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

$$A=\frac{P\cdot i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

目 前 金 額 轉 成 等 額 年 金

丁先生購買汽車一輛，價值 86 萬元，他擬以八年每年一期的分期付款方式來繳納車款，若平均年利率為 9%，試問丁先生每一年應該繳納多少金額的車款？



目 前 金 額 轉 成 等 額 年 金

解：

$$P = \$860{,}000$$

$$n = 8$$

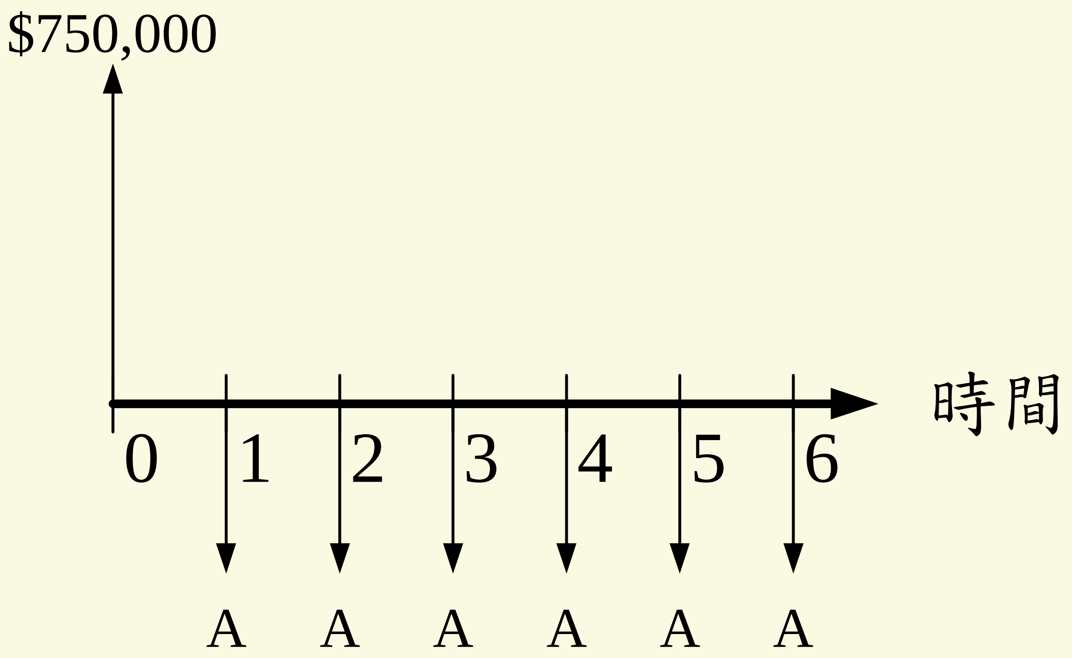
$$i = 9\%$$

$$A = \frac{P \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{860000 \times 9\% \times (1+9\%)^8}{(1+9\%)^8 - 1}$$

$$A = \$155{,}380$$

目 前 金 額 轉 成 等 額 年 金

劉先生向銀行貸款 75 萬元，約定年利率 12.5 % 以六年等額方式償還，試問劉先生每一年固定要償付多少金額？



目 前 金 額 轉 成 等 額 年 金

解：

$$P = \$750{,}000$$

$$n = 6$$

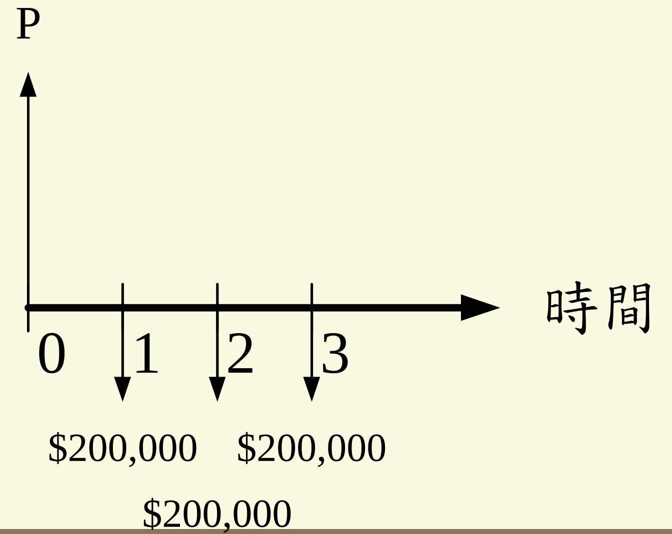
$$i = 12.5\%$$

$$A = \frac{P \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{750000 \times 12.5\% \times (1+12.5\%)^6}{(1+12.5\%)^6 - 1}$$

$$A = \$185{,}009.8$$

等 額 年 金 轉 成 目 前 金 額

周先生想要購買一部汽車，業務員向他推薦使用免頭期款，每年固定繳納 20 萬元，連續繳納三年的付款方式，若平均年利率為 10 % 時，試問周先生如果想要以現金一次付清，則他最多應該付出多少款項的金額？



等 額 年 金 轉 成 目 前 金 額

解：

目前金額 P

等額年金＝\$200,000

年利率＝10%

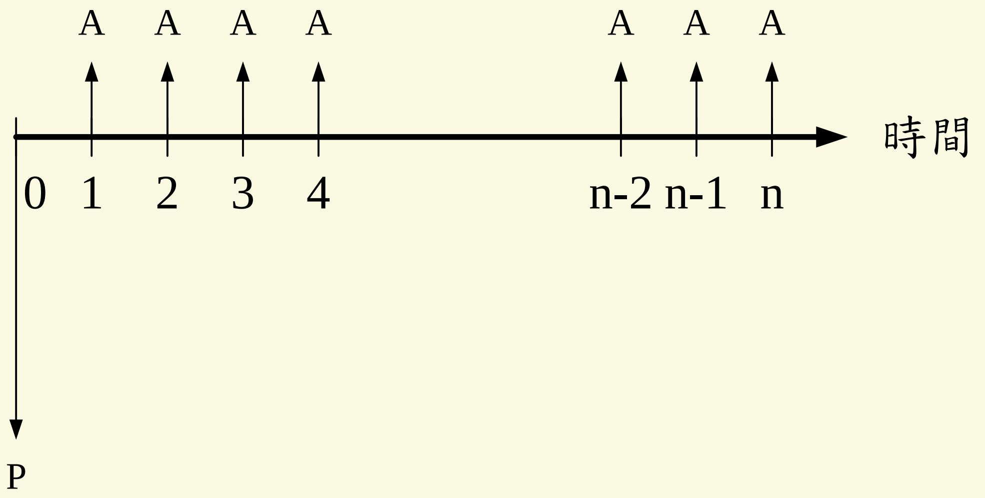
期數＝3

$$P=\frac{\$200{,}000}{(1+10\%)}+\frac{\$200{,}000}{(1+10\%)^2}+\frac{\$200{,}000}{(1+10\%)^3}$$

$$P=\frac{\$200{,}000\left[(1+10\%)^2+(1+10\%)+1\right]}{(1+10\%)^3}$$

$$P=\$497{,}370.4$$

等 額 年 金 轉 成 目 前 金 額



P 代表目前金額　　A 代表等額年金

i 代表年利率　　n 代表期數

$$P=\frac{A}{(1+i)}+\frac{A}{(1+i)^2}+\frac{A}{(1+i)^3}+\ldots\ldots+\frac{A}{(1+i)^{n-1}}+\frac{A}{(1+i)^n}$$

$$P(1+i)^n=A\left[(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\ldots+(1+i)^2+(1+i)+1\right]$$

等額年金轉成目前金額

$$1+r+r^2+\ldots\ldots+r^{k-1}+r^k \qquad\qquad =C$$

$$r+r^2+\ldots\ldots+r^{k-1}+r^k+r^{k+1}=r\cdot C$$

$$r^{k+1}-1=r\cdot C-C \qquad\qquad C(r-1)=r^{k+1}-1$$

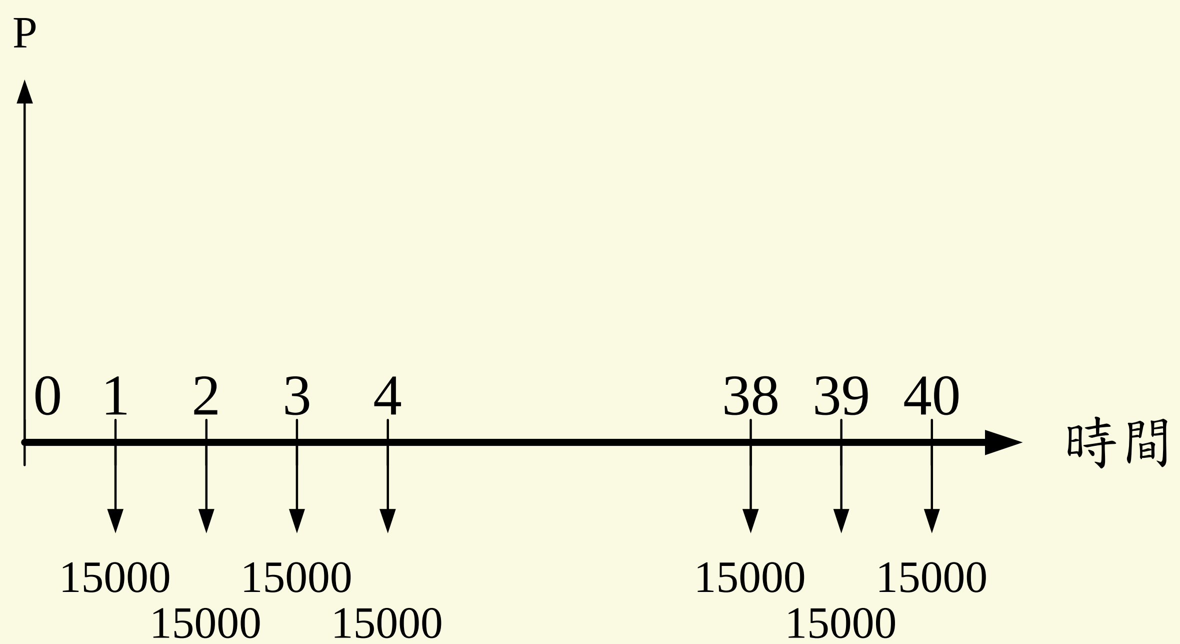
$$C=\frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

$$P(1+i)^n=A\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}\right]=A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

$$P=\frac{A\left[(1+i)^n-1\right]}{i(1+i)^n} \qquad A=\frac{P\cdot i\cdot(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

等 額 年 金 轉 成 目 前 金 額

王小姐購買小套房一間，如果採用每月繳納方式，則需要每個月繳納 $15,000 元共 40 期，平均月利率為 1.275 %，試問該小套房目前的價值多少錢？



等 額 年 金 轉 成 目 前 金 額

解：

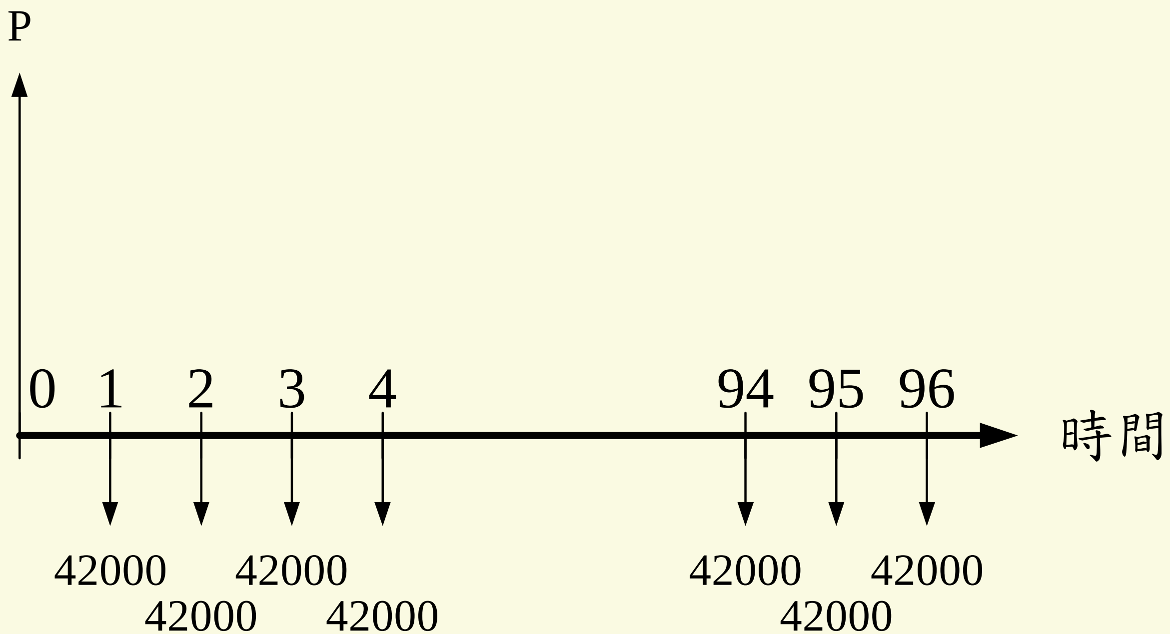
$$A = \$15{,}000 \qquad i = 1.275\% \qquad n = 40$$

$$P = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i(1+i)^n} = \frac{\$15{,}000\left[(1+1.275\%)^{40} - 1\right]}{1.275\%(1+1.275\%)^{40}}$$

$$P = \$467{,}724$$

等 額 年 金 轉 成 目 前 金 額

張小姐購買大樓公寓一戶，如果採用每個月繳款方式，則需要每個月繳納 $42,000 元共 96 期，平均月利率為 1.5 %，試問王小姐此戶房屋目前價值多少錢？



等 額 年 金 轉 成 目 前 金 額

解：

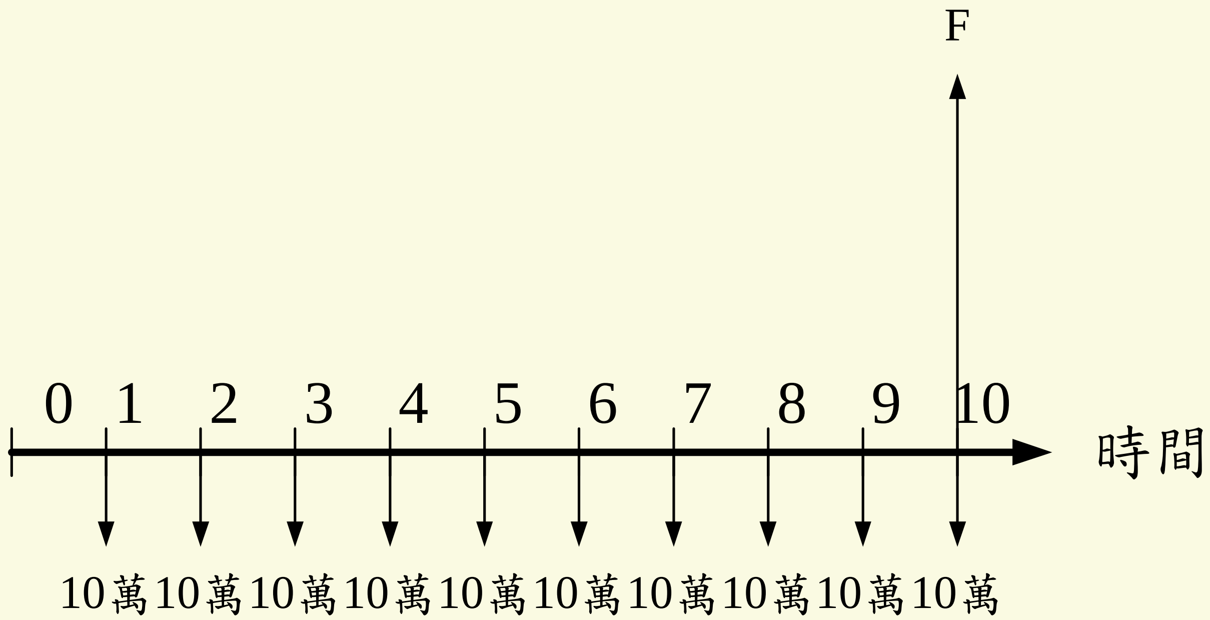
$$A = \$42{,}000 \qquad i = 1.5\% \qquad n = 96$$

$$P = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i(1+i)^n} = \frac{\$42{,}000\left[(1+1.5\%)^{96} - 1\right]}{1.5\%(1+1.5\%)^{96}}$$

$$P = \$2{,}129{,}470.4$$

等 額 年 金 轉 成 未 來 總 值

丁先生每年固定將 10 萬元儲存到銀行戶頭做為養老金，若平均年利率為 6.75 %，試問 10 年後，丁先生的銀行戶頭將有多少金額？



等 額 年 金 轉 成 未 來 總 值

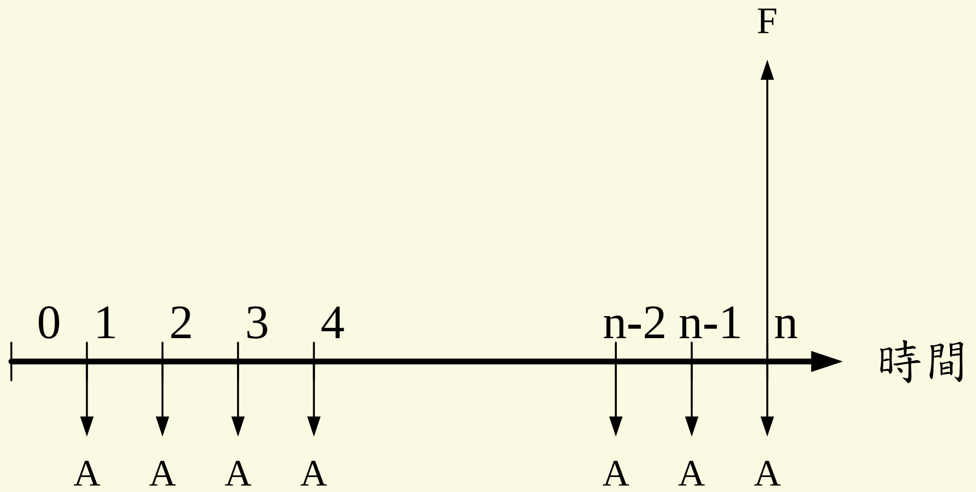
解：

$$F = \$100{,}000\left[1+(1+6.75\%)+(1+6.75\%)^2+\ldots+(1+6.75\%)^9\right]$$

$$F = \$100{,}000[13.65437212]$$

$$F = \$1{,}365{,}437.2$$

等 額 年 金 轉 成 未 來 總 值



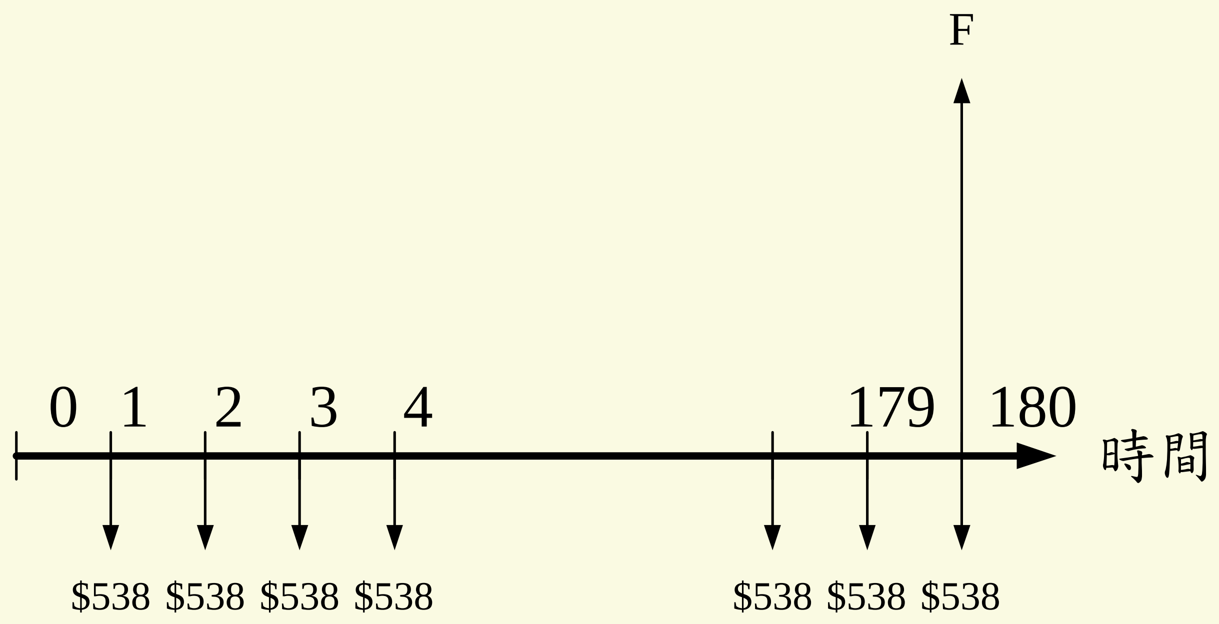
$$F = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \ldots\ldots + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-1}$$

$$F = A\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots\ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$F = \frac{A\left[(1+i)^{n-1+1} - 1\right]}{(1+i)-1} = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

等 額 年 金 轉 成 未 來 總 值

毛小姐每月固定繳納保險費 $538 元，一共需要繳納 180 期，平均月利率為 0.8 %，試問到期後毛小姐一共可以領回多少金額？



等額年金轉成未來總值

解：

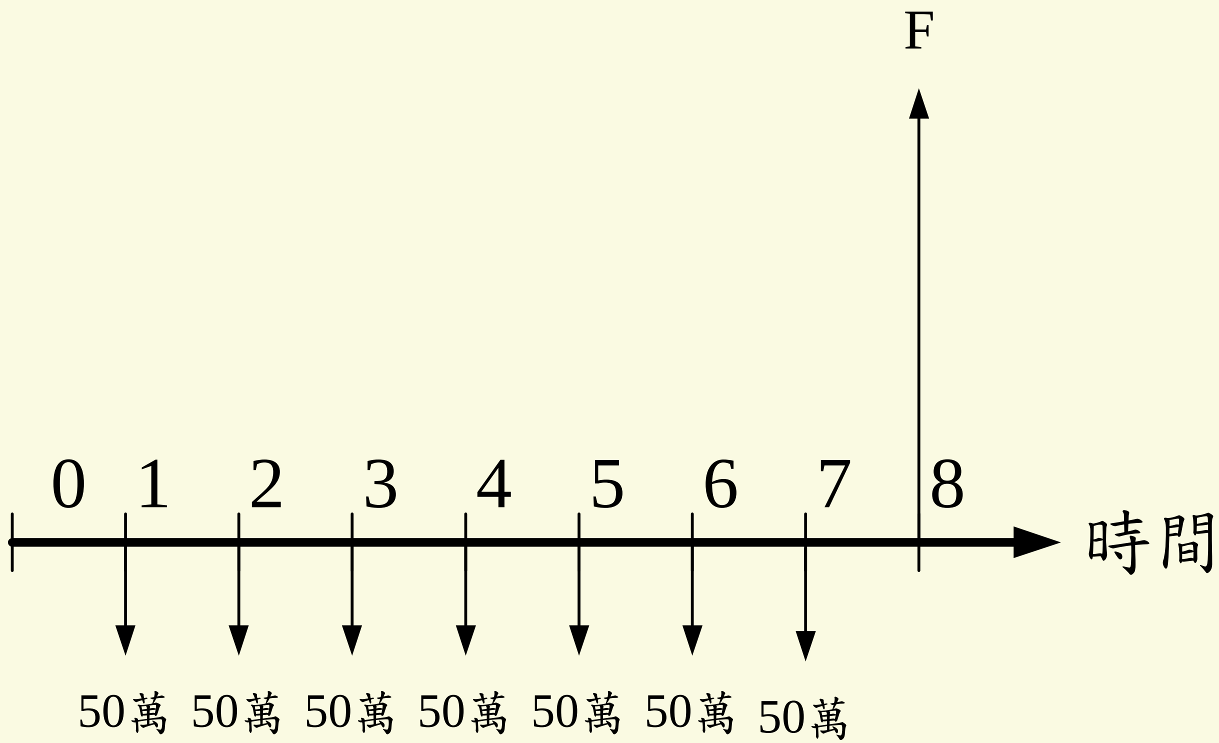
$$F_{180} = \frac{A\left[\left(1+i\right)^{180} - 1\right]}{i}$$

$$F_{180} = \frac{\$538\left[\left(1+0.8\%\right)^{180} - 1\right]}{0.8\%}$$

$$F_{180} = \$214{,}970.2$$

等 額 年 金 轉 成 未 來 總 值

張老闆固定每年年底投資 50 萬元連續七年，假設平均年利率為 7.25 % ，試問八年後至少要回收多少金額才不至於虧本？



等 額 年 金 轉 成 未 來 總 值

解：

$$F_7 = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} = \frac{\$500{,}000\left[(1+7.25\%)^7 - 1\right]}{7.25\%}$$

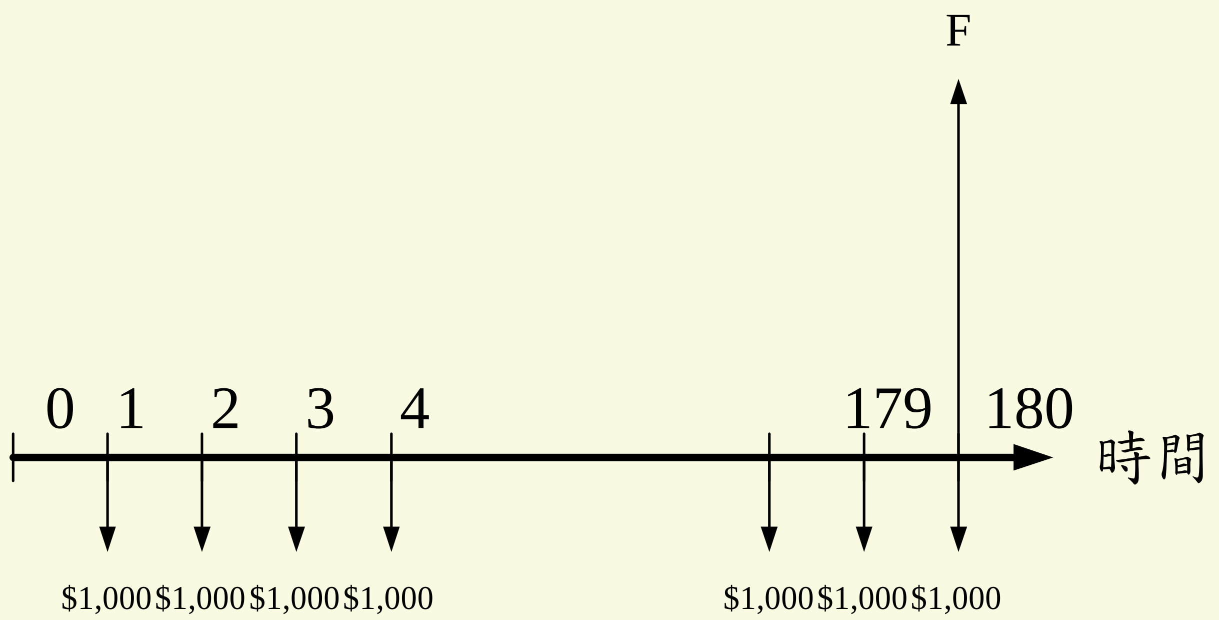
$$F_7 = \$4{,}360{,}200.4$$

$$F_8 = F_7(1+i) = \$4{,}360{,}200.4 \times (1+7.25\%)$$

$$F_8 = \$4{,}676{,}314.9$$

等額年金轉成未來總值

吳小姐的公司規定每人每一個月從薪資中固定提撥 1000 元當成退職準備金，平均月利率為 0.85 %，若吳小姐服務滿 15 年後，則她將獲得多少的退職金？



等額年金轉成未來總值

解：

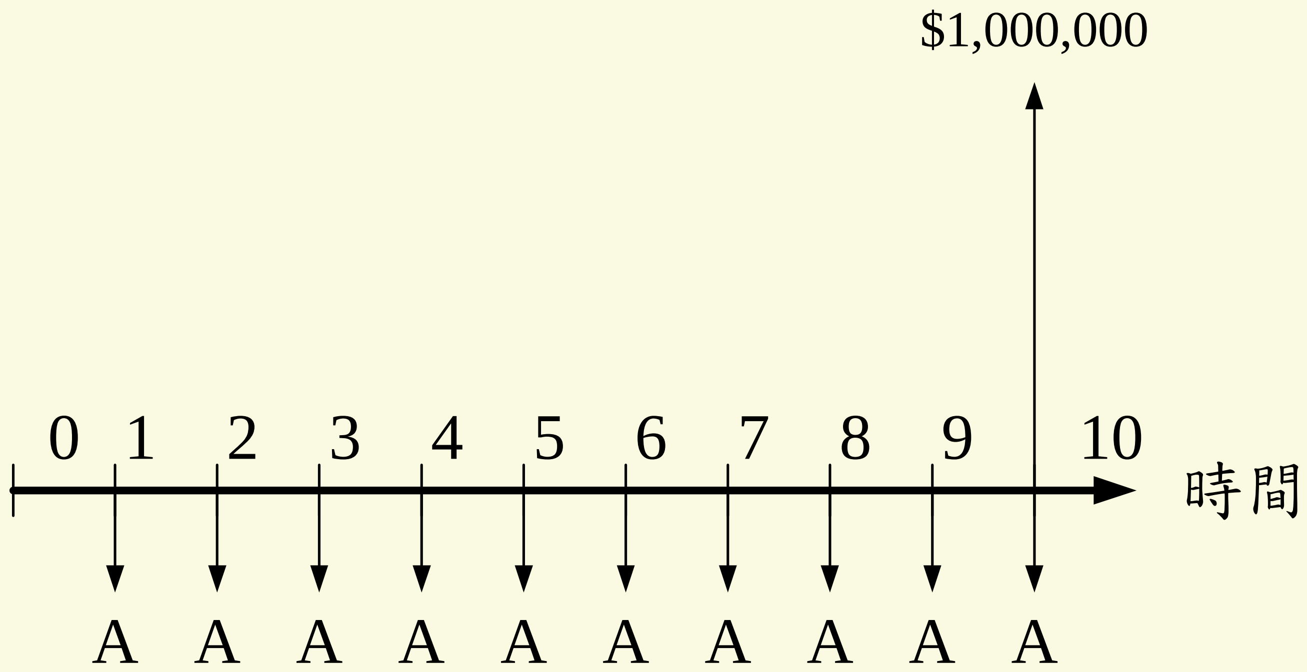
$$F_{180} = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

$$F_{180} = \frac{\$1{,}000\left[(1+0.85\%)^{180} - 1\right]}{0.85\%}$$

$$F_{180} = \$422{,}166.2$$

未 來 總 值 轉 成 等 額 年 金

孫先生想要十年後擁有 100 萬元的現金，如果平均年利率為8%，試問孫先生從現在開始，每年期末要固定儲存多少金額方能達成此願望？



未來總值轉成等額年金

解：

$$F_{10} = \$1{,}000{,}000$$

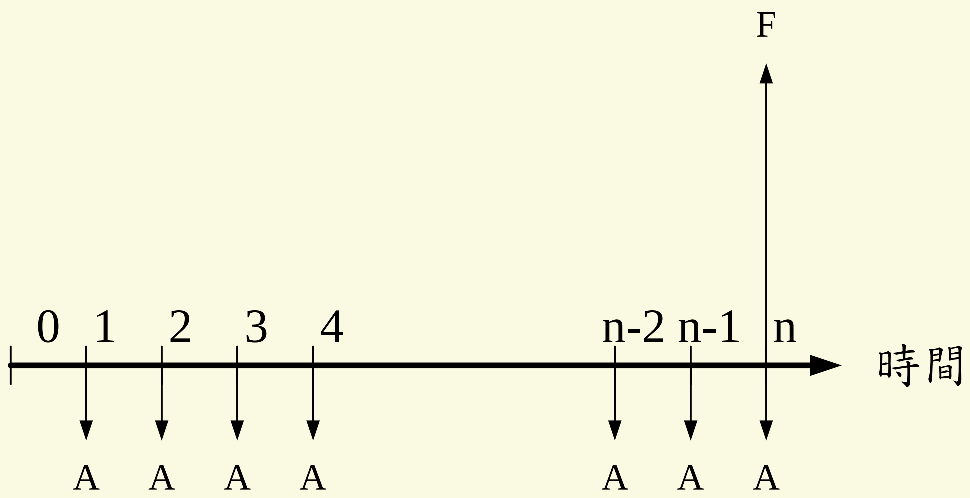
$$F_{10} = A + A(1+8\%) + A(1+8\%)^2 + \ldots\ldots + A(1+8\%)^9$$

$$F_{10} = A\left[1 + (1+8\%) + (1+8\%)^2 + \ldots\ldots + (1+8\%)^9\right]$$

$$\$1{,}000{,}000 = A \times 14.48656247$$

$$A = \$69{,}029.5$$

未 來 總 值 轉 成 等 額 年 金



$$F = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \ldots\ldots + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-1}$$

$$F = A\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots\ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$F = \frac{A\left[(1+i)^{n-1+1} - 1\right]}{(1+i)-1} = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

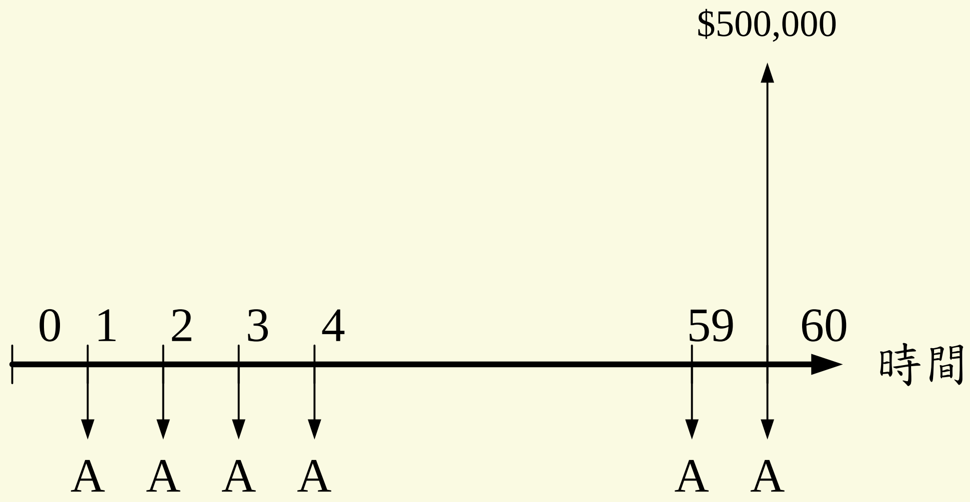
$$A = \frac{F \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

未來總值轉成等額年金

林先生負責規劃公司退職金提列工作，公司政策是每一個月從每個員工的薪資當中預扣固定的金額，另外公司亦相對應的提撥同等金額的款項，然後儲存到銀行中退職準備金的戶頭，假設平均的月利率為0.85％，若公司宣稱工作滿五年則至少可以領回 50 萬元的退職金，試問公司每個月要從員工薪資中預扣多少金額？

未 來 總 值 轉 成 等 額 年 金

解：



5年 ＝ 60個月

$$A = \frac{F \cdot i}{(1+i)^n - 1} = \frac{\$500{,}000 \times 0.85\%}{(1+0.85\%)^{60} - 1}$$

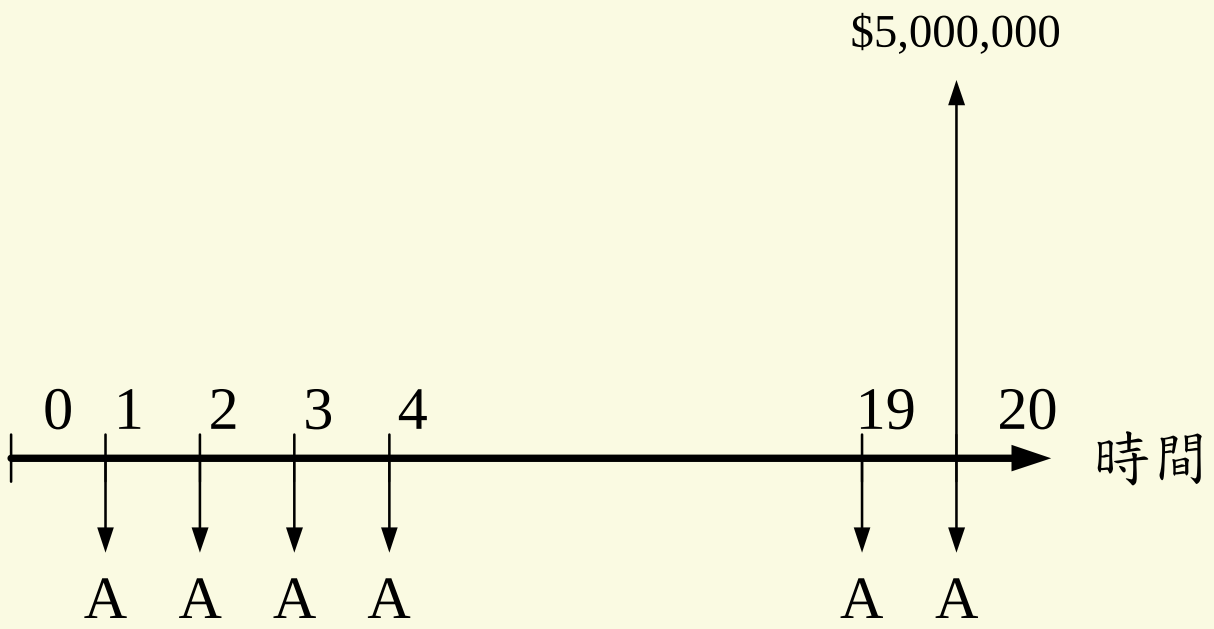
$A = \$6{,}422.8$ 元

員工只出一半金額，因此每個月

每位員工要預扣 $3,211.4 元

未 來 總 值 轉 成 等 額 年 金

周先生準備每一年固定儲存一筆錢來作為他女兒 20 年後結婚的嫁妝 500 萬元，假設平均年利率為 7.5 %，試問從現在開始他每一年期末應該儲存多少金額？



未 來 總 值 轉 成 等 額 年 金

解：

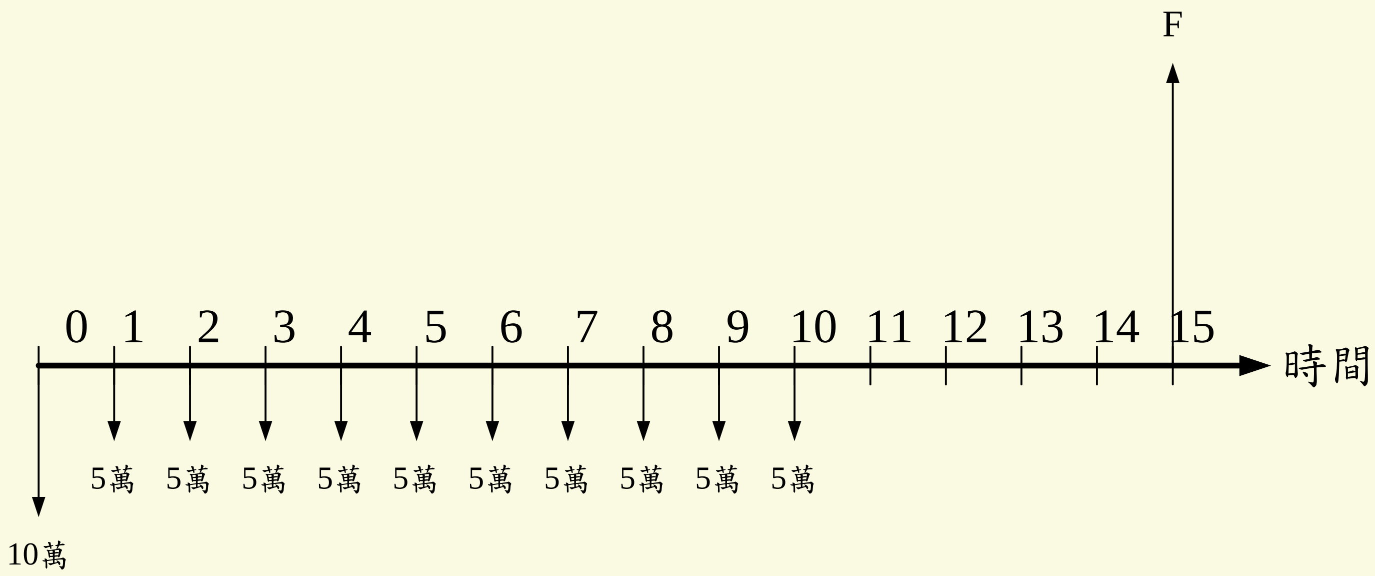
$$A = \frac{F \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

$$A = \frac{\$5{,}000{,}000 \times 7.5\%}{(1+7.5\%)^{20} - 1}$$

$$A = \$115{,}461 \text{ 元}$$

綜　合　應　用

王先生目前手頭上有現金 10 萬元，他將這一筆錢存入平均年利率為 8.75 %的銀行中，然後每一年期末再固定存入 5 萬元持續十年，試問十五年後王先生的帳戶中會有多少金額？



綜合應用

解：

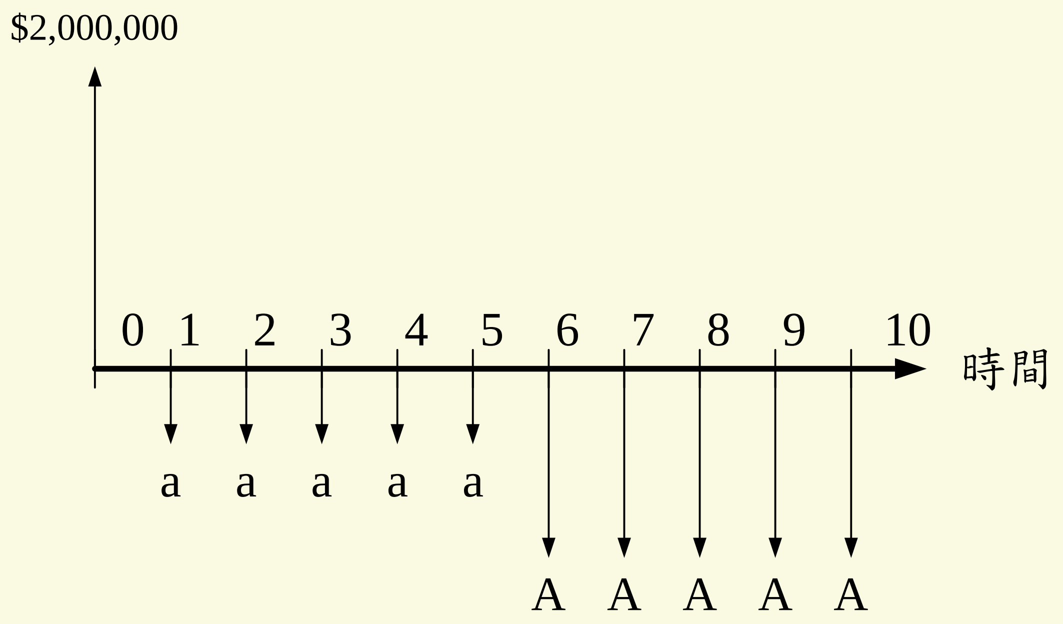
$$F = \$100{,}000 \times (1+8.75\%)^{15} + \frac{\$50{,}000\left[(1+8.75\%)^{10} - 1\right]}{8.75\%} \times (1+8.75\%)^{5}$$

$$F = \$351{,}916.0 + \$1{,}141{,}771.3$$

$$F = \$1{,}493{,}687.3 \text{ 元}$$

綜　合　應　用

張小姐向銀行貸款 200 萬元，約定年利率為 12.5 %，前五年每一年只繳納利息而不還本金，爾後五年則每一年等額償付本息，試問張小姐該如何來償還此筆貸款？



綜　合　應　用

解：

前面五年每年繳納的利息部分：

$$a = \$2{,}000{,}000 \times 12.5\% = \$250{,}000$$ 元

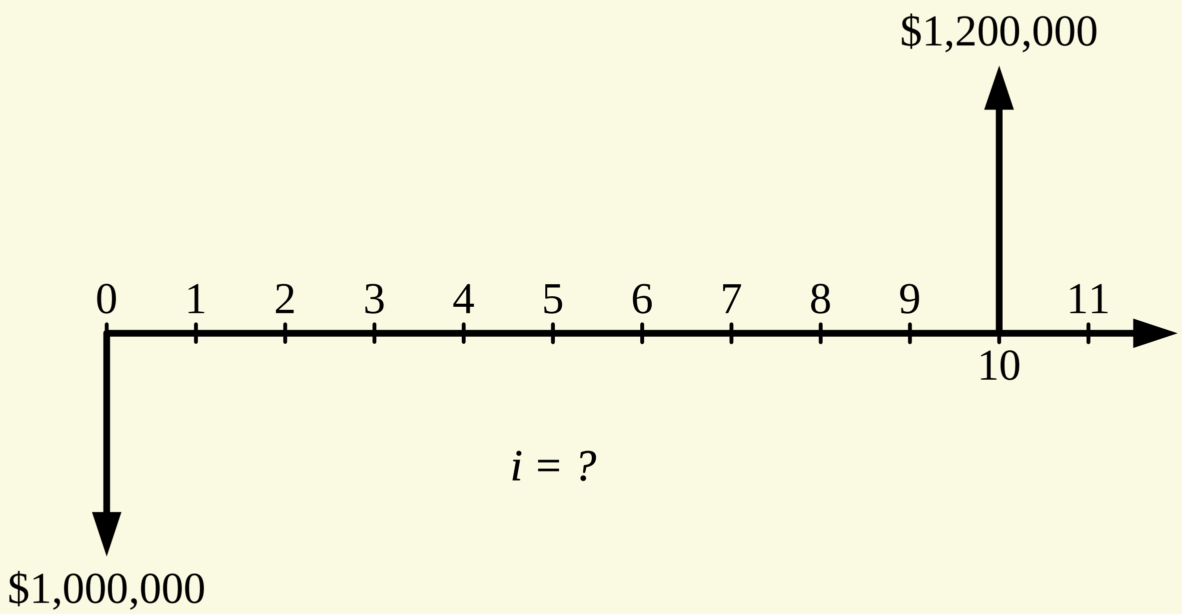
後面五年每年等額償付本息部分：

$$A = \frac{P \cdot i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \frac{\$2{,}000{,}000 \times 12.5\% \cdot (1+12.5\%)^5}{(1+12.5\%)^5 - 1}$$

$$A = \$561{,}708.1$$ 元

綜合應用

假設何小姐十年前將現金$1,000,000元拿來購買不動產，目前她將此不動產脫手賣出後實質獲得$1,200,000元，試問何小姐此項投資的約當年利率？



綜合應用

$$F = \$1{,}200{,}000 \quad P = \$1{,}000{,}000$$

$$n = 10 \qquad i = ?$$

$$F = P \cdot (1+i)^n$$

$$\$1{,}200{,}000 = \$1{,}000{,}000 \cdot (1+i)^{10}$$

$$(1+i)^{10} = \frac{\$1{,}200{,}000}{\$1{,}000{,}000} = 1.2$$

兩邊取 log

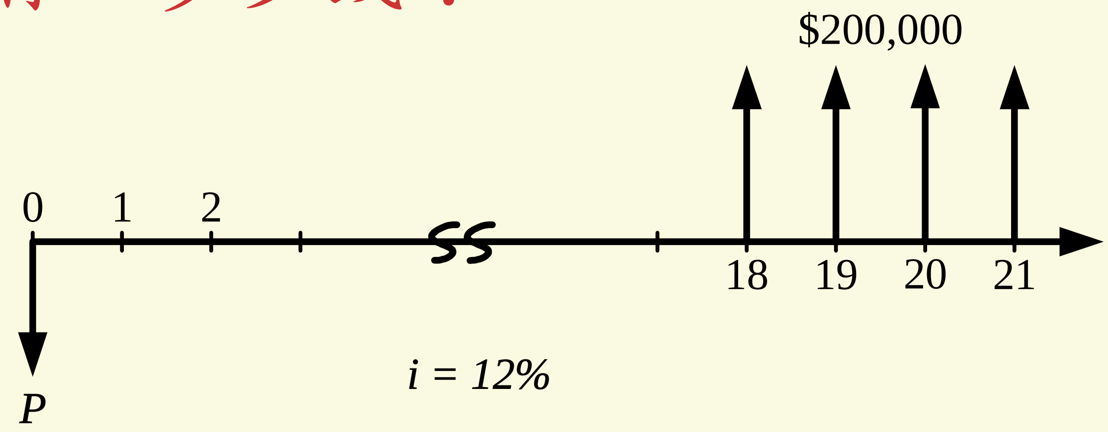
$$10 \cdot \log(1+i) = \log 1.2 \qquad \log(1+i) = \frac{\log 1.2}{10}$$

$$e^{\log(1+i))} = e^{\frac{\log 1.2}{10}} \qquad (1+i) = e^{\frac{\log 1.2}{10}} = 1.0183994$$

$$i = 1.83994\%$$

綜　合　應　用

某位父親在孩子初生那一天為了籌備小孩子將來的大學教育經費，因此他到銀行存入一筆固定年利率12%的基金，他希望當小孩子滿18歲上大學後的四年當中，每一年都能領到$200,000元的教育金，試問他當時應該存入多少錢？

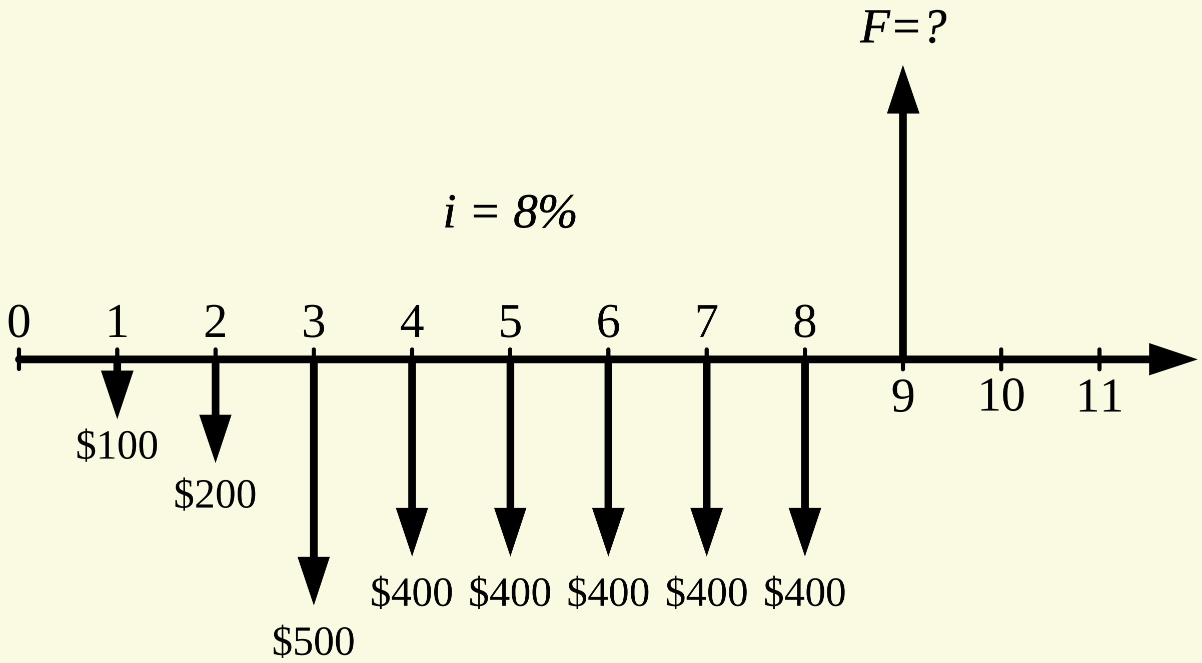


綜　合　應　用

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{A}{(1+i)^{18}} + \frac{A}{(1+i)^{19}} + \frac{A}{(1+i)^{20}} + \frac{A}{(1+i)^{21}} \\
&= \frac{A}{(1+i)^{21}} \cdot \left[1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3\right] \\
&= \frac{A}{(1+i)^{21}} \cdot \left[\frac{(1+i)^4-1}{(1+i)-1}\right] \\
&= \frac{A}{(1+i)^{21}} \cdot \frac{\left[(1+i)^4-1\right]}{i} \\
&= \frac{\$200{,}000 \times \left[(1.12)^4-1\right]}{(1.12)^{21} \times 0.12} \\
&= \$88{,}474.55
\end{aligned}
$$

綜合應用

假設年利率為8%時，每年年底存入的金額如下之現金流量圖所示，試問第9年年底時，將可以全數領回多少金額的本息？



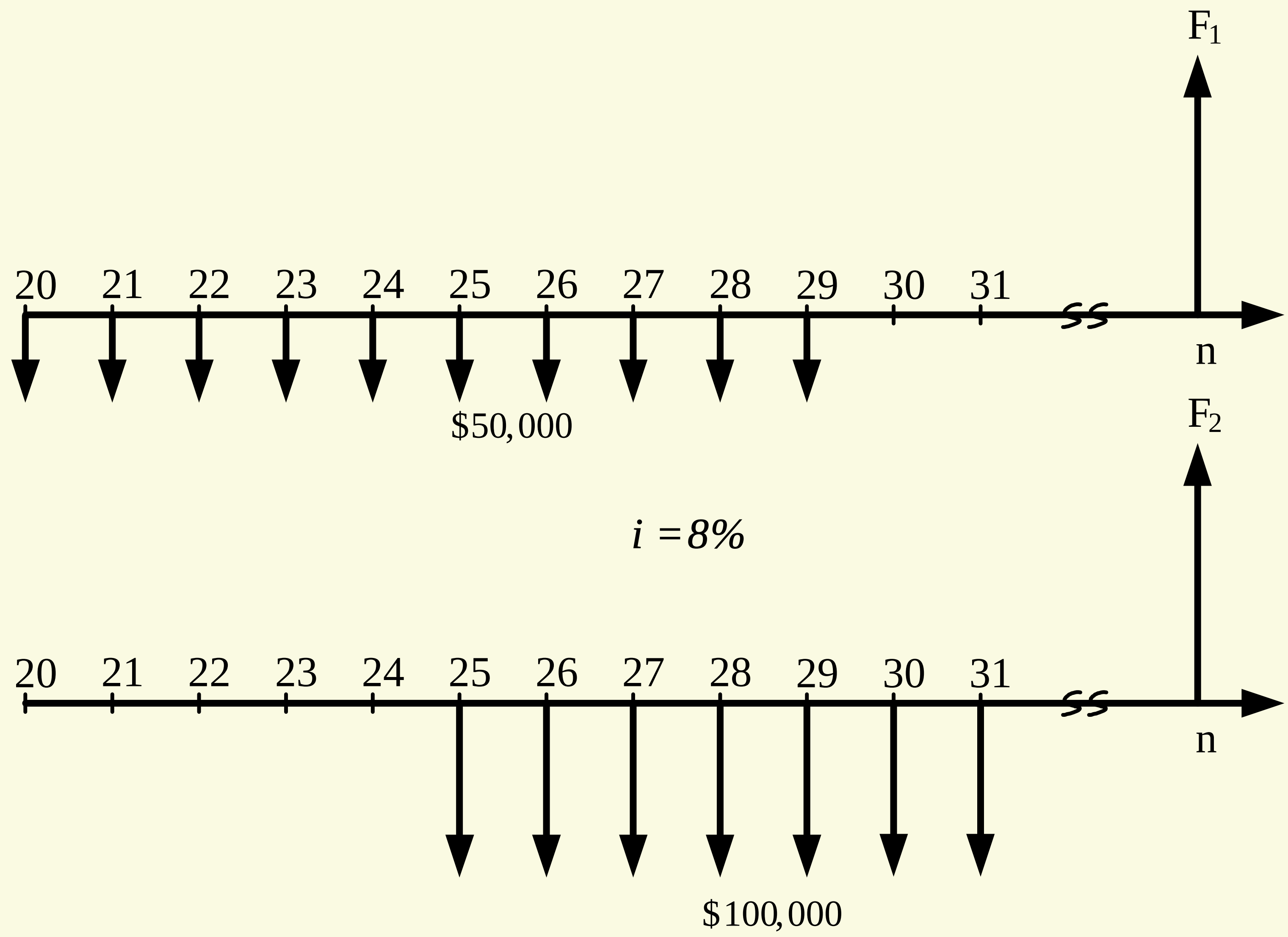
綜 合 應 用

$$
\begin{aligned}
F &= 400\cdot(1+i)+400\cdot(1+i)^2+\ldots+400\cdot(1+i)^5+500\cdot(1+i)^6+200\cdot(1+i)^7+100\cdot(1+i)^8 \\
&= 400\cdot(1+i)+400\cdot(1+i)^2+\ldots+400\cdot(1+i)^8+100\cdot(1+i)^6-200\cdot(1+i)^7-300\cdot(1+i)^8 \\
&= 400\cdot(1+i)\cdot\left[1+(1+i)+\ldots+(1+i)^7\right]+100\cdot(1+i)^6-200\cdot(1+i)^7-300\cdot(1+i)^8 \\
&= 400\cdot(1+i)\cdot\left[\frac{(1+i)^8-1}{(1+i)-1}\right]+100\cdot(1+i)^6-200\cdot(1+i)^7-300\cdot(1+i)^8 \\
&= \frac{400\cdot(1+i)\cdot\left[(1+i)^8-1\right]}{i}+100\cdot(1+i)^6-200\cdot(1+i)^7-300\cdot(1+i)^8 \\
&= \frac{400\times1.08\times\left[1.08^8-1\right]}{0.08}+100\times1.08^6-200\times1.08^7-300\times1.08^8 \\
&= 4595.023+158.687-342.765-555.279 \\
&= 3855.666
\end{aligned}
$$

綜　合　應　用

假設許先生的儲蓄計畫是從20歲開始每年年底定期定額儲存$50,000元，連續10年之後不再存錢。他的同年好友張先生則是在25歲之後開始每年定期定額儲存$100,000元，倘若年利率固定為8%時，試問他們在幾歲時帳戶的餘額會最接近？

綜　合　應　用


F1
20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
n
$50,000
F2
i = 8%
20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
n
$100,000

綜合應用

$$F_1 = A_1 \cdot (1+i)^{n-29} + A_1 \cdot (1+i)^{n-28} + \ldots + A_1 \cdot (1+i)^{n-20}$$

$$= A_1 \cdot (1+i)^{n-29} \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^9\right]$$

$$= A_1 \cdot (1+i)^{n-29} \cdot \frac{\left[(1+i)^{10} - 1\right]}{i}$$

$$F_2 = A_2 + A_2 \cdot (1+i) + A_2 \cdot (1+i)^2 + \ldots + A_2 \cdot (1+i)^{n-25}$$

$$= A_2 \cdot \left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-25}\right]$$

$$= A_2 \cdot \frac{\left[(1+i)^{n-24} - 1\right]}{i}$$

當 $n = 30$ 時

$$F_1 = \frac{50000 \times 1.08 \times \left[(1.08)^{10} - 1\right]}{0.08} = 782{,}274.4$$

$$F_2 = \frac{100000 \times \left[(1.08)^{6} - 1\right]}{0.08} = 733{,}592.9$$

相差 $48,681.5

綜　合　應　用

當 $n=31$ 時

$$F_1=\frac{50000\times(1.08)^2\times\left[(1.08)^{10}-1\right]}{0.08}=844{,}856.3$$

$$F_2=\frac{100000\times\left[(1.08)^7-1\right]}{0.08}=892{,}280.3$$

相差　$47,424

當 $n=32$ 時

$$F_1=\frac{50000\times(1.08)^3\times\left[(1.08)^{10}-1\right]}{0.08}=912{,}444.8$$

$$F_2=\frac{100000\times\left[(1.08)^8-1\right]}{0.08}=1{,}063{,}662.8$$

相差　$151,218

綜　合　應　用

當 $n=33$ 時

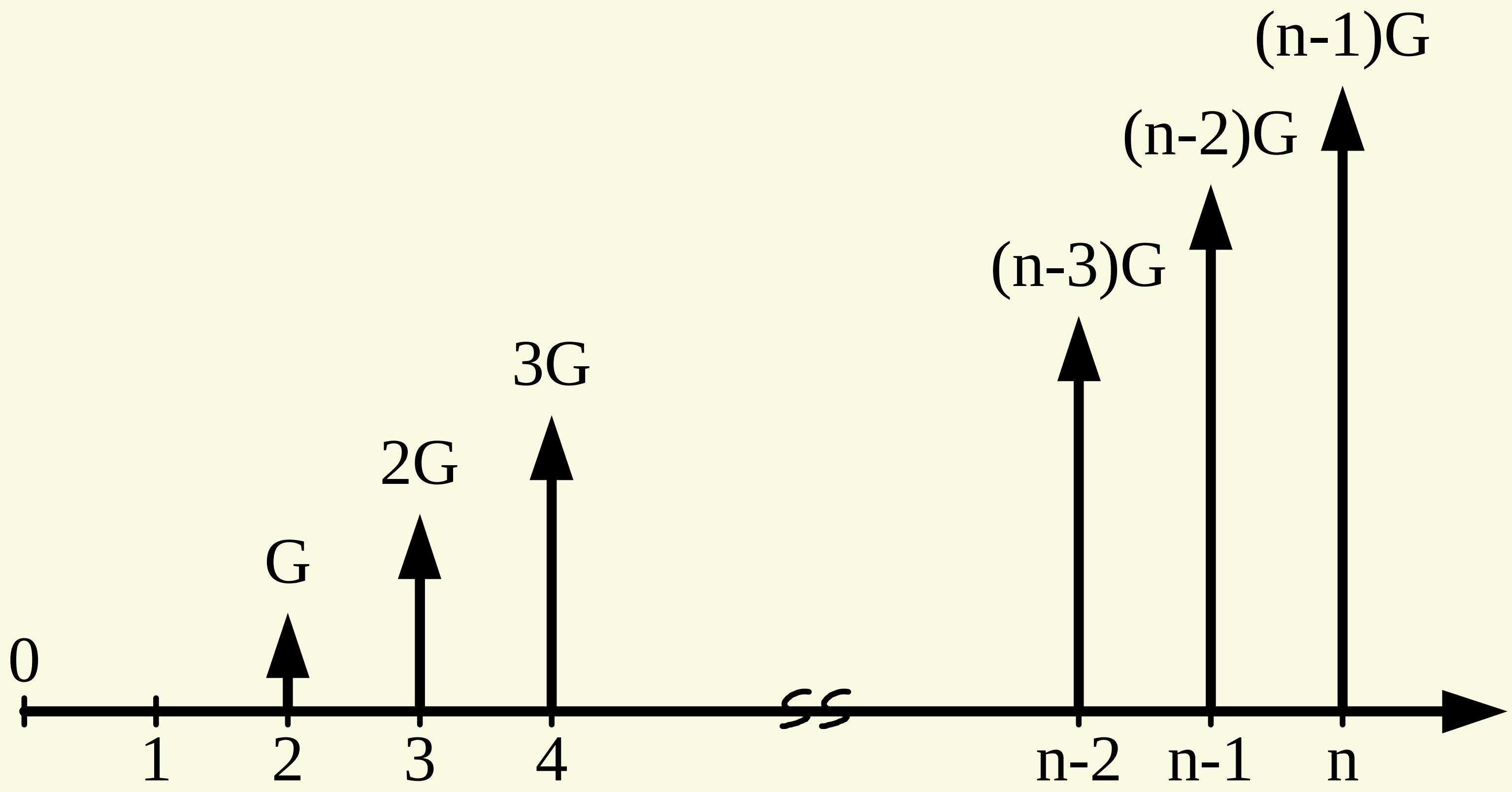
$$F_1=\frac{50000\times(1.08)^4\times\left[(1.08)^{10}-1\right]}{0.08}=985{,}440.4$$

$$F_2=\frac{100000\times\left[(1.08)^9-1\right]}{0.08}=1{,}248{,}755.8$$

相差　\$263,315.4

因此當年紀為 31 歲時，帳戶餘額最為相近

等 差 級 數 之 現 金 流 量 圖



等 差 級 數 之 現 金 流 量 圖

$$
\begin{aligned}
F &= (n-1)\cdot G+(n-2)\cdot G\cdot(1+i)+(n-3)\cdot G\cdot(1+i)^2+\ldots+3\cdot G\cdot(1+i)^{n-4}+2\cdot G\cdot(1+i)^{n-3}+G\cdot(1+i)^{n-2}\\
&= G\cdot\left[(n-1)+(n-2)\cdot(1+i)+(n-3)\cdot(1+i)^2+\ldots+3\cdot(1+i)^{n-4}+2\cdot(1+i)^{n-3}+1\cdot(1+i)^{n-2}\right]
\end{aligned}
$$

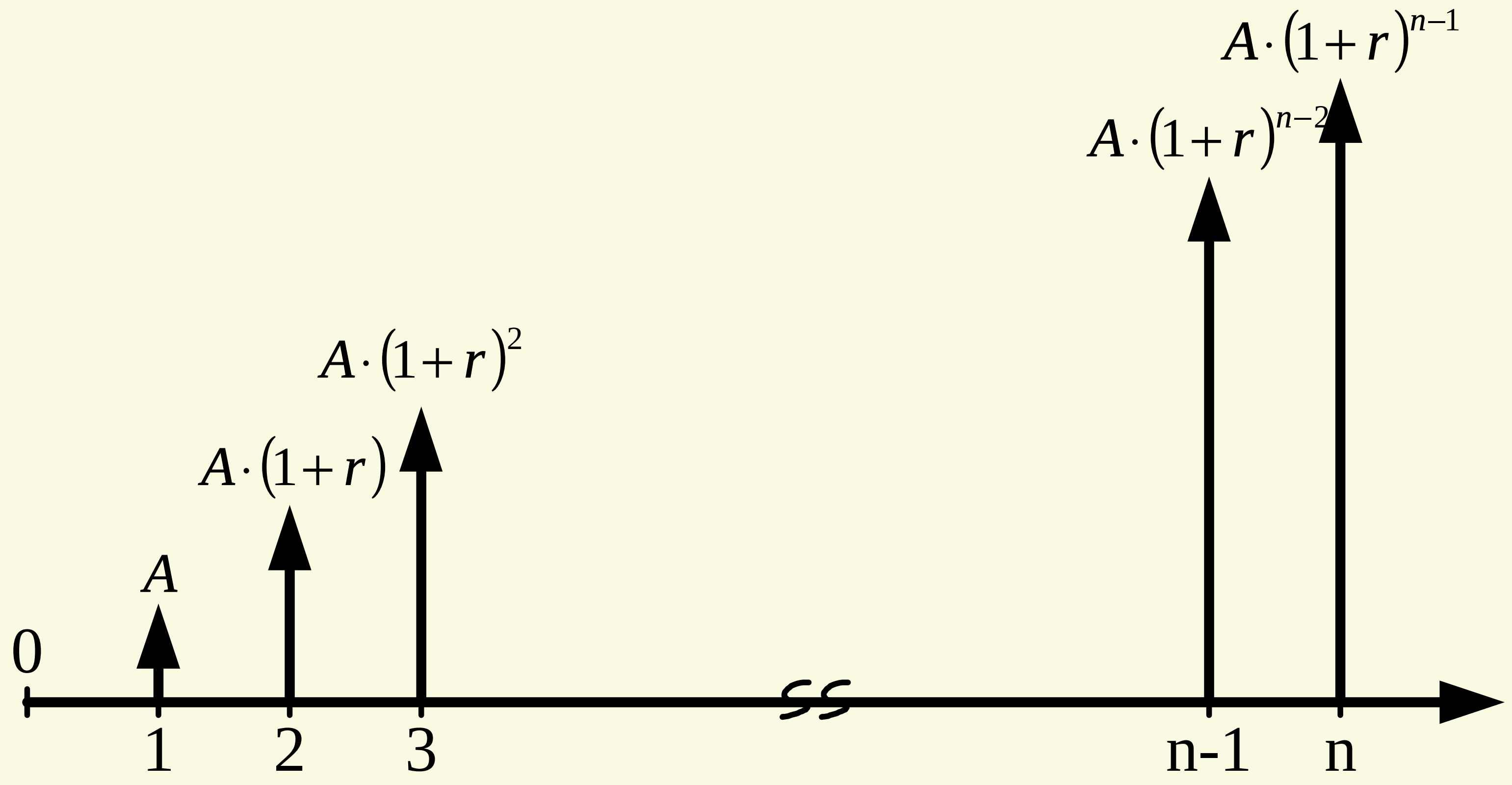
$$
\begin{aligned}
K &= (n-1)+(n-2)\cdot(1+i)+(n-3)\cdot(1+i)^2+\ldots+3\cdot(1+i)^{n-4}+2\cdot(1+i)^{n-3}+1\cdot(1+i)^{n-2}\\
(1+i)\cdot K &= (n-1)\cdot(1+i)+(n-2)\cdot(1+i)^2+\ldots+4\cdot(1+i)^{n-4}+3\cdot(1+i)^{n-3}+2\cdot(1+i)^{n-2}+1\cdot(1+i)^{n-1}\\
i\cdot K &= 1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\ldots+(1+i)^{n-1}-n
\end{aligned}
$$

$$i\cdot K=\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}-n$$

$$K=\frac{(1+i)^n-1}{i^2}-\frac{n}{i}$$

$$F=G\cdot\left[\frac{(1+i)^n-1}{i^2}-\frac{n}{i}\right]$$

等比級數之現金流量圖



課　程　講　授　完　畢

謝　謝　！