

光電量測實習 (Experiments of Electro-Optical Measurement)

By Shinn-Fwu Wang

實驗四：傅氏光學實習 --補充教材

By Shinn-Fwu Wang

一、傅氏光學：(Fourier Optics)

1. (1) 傅氏光學的發展是衍生於通訊理論

(2) 在線性系統之架構下，光波在空間之傳輸可概分為

① _____ (or _____ diffraction)

② _____ (or _____ diffraction)

2. 傅氏轉換 (Fourier Transform) 與逆傅氏轉換

(1) Fourier Transform：(若有一個二維函數 g 作傅氏轉換)

=>傅氏頻譜 G

$$G(f_x, f_y) = F\{g\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy \quad (1)$$

(2) Inverse Fourier Transform

$$g(x, y) = F^{-1}\{G\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(f_x, f_y) \exp[j2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y \quad (2)$$

<P.S.> g 與 G 之座標單位互為倒數空間

假若 g 之座標單位為 _____ => G 之座標單位就是 _____

在光學上，傅氏轉換處理之座標單位為 _____ 及 _____ (空間倒數)

3. Fraunhofer diffraction 之光強度分佈正好是_____之傅氏

轉換

<分析>:

a. 由 Fraunhofer diffraction，我們可導出光經任一形狀之孔洞時，在遠處的屏障上任一點 $P(X, Y, Z)$ 之 Fraunhofer diffraction 為

$$E_p(X, Y, Z) = \frac{e^{j(\alpha z - kz)}}{Z} \cdot e^{-j\frac{k}{2Z}(x^2 + y^2)} \cdot \iint E_s(x, y) e^{-j\frac{k}{Z}(xX + yY)} dx dy$$

$$= \text{_____} \quad (3)$$

(因 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

a. 由(1)，(3)式比較得知 (可令)

$$f_x = \frac{X}{\lambda Z}, f_y = \frac{Y}{\lambda Z} \text{-----} \rightarrow \text{空間頻率}$$

$$\Rightarrow E_p(f_x, f_y) = \text{_____}$$

$$= g(Z) F\{E_s(x, y)\} \quad (4)$$

$$\text{其中 } g(Z) = \frac{e^{j(\alpha z - kz)}}{Z} \cdot e^{-j\frac{k}{2Z}(x^2 + y^2)} \quad (5)$$

c. (5)式中僅含相因數，對成像強度 I，(I ∝ E_p E_p*) 無影響，所以若僅考慮其強度分佈時，僅須考慮 E_s(x, y) 之 Fourier Transform 即可。

【註 1】加適當透鏡可消除(5)式中之後項

【註 2】從 Fourier Transform 之意義，我們可以把 E_s(x, y) 看成是由無窮

多個不同角度出射的_____組合，每個平面波的分量均不可。

I. E_s(x, y) 僅是振幅分佈的函數

$$E_s(x, y) = |E_m(x, y) T(x, y)| \quad (6)$$

E_m(x, y) : 入射平面波之振幅分佈

T(x, y) : 為孔洞之穿透函數

$$T(x, y) = |T(x, y)| e^{j\phi(x, y)} \quad (7)$$

現吾人將重點放在相因素變化。

若經過厚度不均的透度，則令 $|T(x, y)| = 1$ ，而經透鏡產生之

相位延遲

(見 "Goodman": "Introduction to Fourier Optics")

$$\odot \phi(x, y) = \underbrace{kn(x, y)}_{\uparrow} \Delta(x, y) + k \underbrace{[\Delta_o - \Delta(x, y)]}_{\uparrow} \quad (8)$$

n : 透鏡折射率

$$\odot \Delta(x, y) = \Delta_o - \frac{(x^2 + y^2)}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (9)$$

= 厚度函數

R_1, R_2 = 透鏡之曲率半徑

III.將(8),(9)二式帶入(7)式

$$\Rightarrow T(x,y) = e^{jk\Delta_0} \cdot \exp \left[-j(n-1) \cdot \frac{(x^2+y^2)}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

$$= e^{jk\Delta_0} \cdot \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2+y^2) \right] \quad (10)$$

$$f \equiv \text{透鏡焦距} = \left[(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1} \quad (11)$$

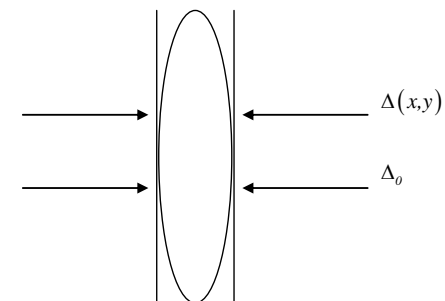
a. 若考慮有一單頻平面波入射透鏡之物體面，則其出射振幅分佈為

$$E_s(x,y) = E_m T(x,y) \quad (12)$$

將(10)、(12)式帶入 Fresnel 近場繞射公式

$$E_p(X,Y,Z) = \frac{e^{j(\alpha z)}}{Z} \iint E_s(x,y) e^{-j \frac{k}{2Z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} \quad (13)$$

且令 $Z=f$ (觀察位置再 f)



$$\Rightarrow E_p(X,Y,Z) = g'(Z) F \{ E_s(x,y) \}$$

$$= \underline{\hspace{10em}} \quad (14)$$

$$\text{其中 } g'(Z) = \underline{\hspace{10em}} \quad (15)$$

【註 3】(由上面可知)，吾人加(使用)透鏡時，在 Fresnel 的條件下，仍可得到 **Fraunhofer 之遠場繞射結果** (須觀察位置再 $Z=f$ 處)。

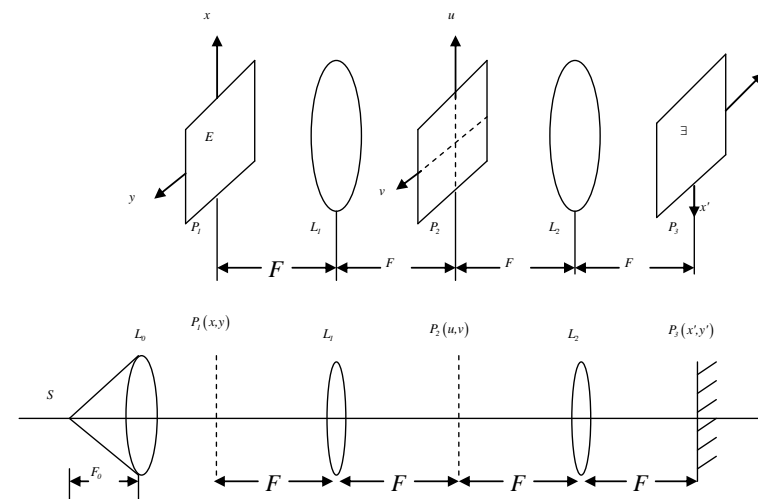
【註 4】(1) 當物體面或孔洞分佈下直接貼於透鏡，而

是放在透鏡之前焦平面上，則會產生一相因素剛好抵銷
 _____ 項。

(2) 所以使(15)式中只剩常數和行進相因素兩項

* (3) 當物體面置於透鏡之前焦平面時，可以得到完全真確知富(傅)氏轉換。

二、實驗架構



<分析>

(1) 由幾何光學觀點來看，物平面上任一點 A 發出之光束經 L_1 形成平行光束，再經 L_2 會聚在其後之焦平面上形成一像點 A' ，因而 P_3 平面是 P_1 的成像平面， P_3 面上將得到放大倍數為 1 的 **倒像**。

(2) ①由傅氏光學之觀點來看，透鏡具有傅氏轉換的功能。

在 P_2 處將形成 $E_s(x,y)$ 之空間頻率分佈 $E_{FT}(f_x, f_y)$

$$f_x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$f_y = \underline{\hspace{2cm}}$$

②因 $P_2(u,v)$ 亦位於透鏡 L_2 之前焦平面上，因此 L_2 之後焦平面

P_3 上之振幅分佈 $E_i(x',y')$ 又是 $E_{FT}(f_x, f_y)$ 之傅氏轉換

$$\Rightarrow F\{E_{FT}(f_x, f_y)\} = F\{F\{E_{FT}(f_x, f_y)\}\} = \underline{\hspace{2cm}}$$

三、傅氏轉換常用公式

1. $F\{\delta(x)\} = 1$

<分析>

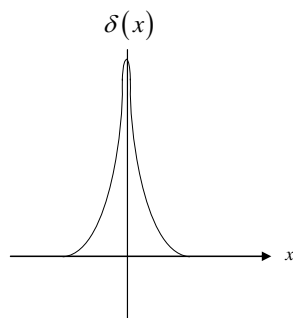
$\delta(x)$ 定義如下：

$$\begin{cases} \delta(x) = 0, & x \neq 0 \\ \delta(x) = \infty, & x = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x) dx = 1, & \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$\delta(x)$ 之特性

$$\begin{cases} \delta(x-x_0) = 0, & x \neq x_0 \\ \int_{x_1}^{x_2} f(\alpha) \delta(\alpha-x_0) d\alpha = f(x_0), & x_1 < x_0 < x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{可知 } F\{\delta(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{j2\pi f_x x} dx \\ &= e^{-j2\pi f_x x} \Big|_{x=0} = 1 \end{aligned}$$



2. $F\{1\} = \delta(f_x)$

3. $F\{\delta(x \pm x_0)\} = e^{\pm j2\pi x_0 f_x}$

4. $F\{e^{\pm j2\pi f_0 x}\} = \delta(f_x \mp f_0)$

5. $F\{\cos(2\pi f_0 x)\} = \frac{1}{2} [\delta(f_x + f_0) + \delta(f_x - f_0)]$

6. $F\{\sin(2\pi f_0 x)\} = \frac{j}{2} [\delta(f_x + f_0) - \delta(f_x - f_0)]$

* 7. $F\{F\{f(x)\}\} = f(-x)$

8. $F\{f(x)g(x)\} = F\{f(x)\} * F\{g(x)\} = F(f_x) * G(f_x)$

【註】 convolution (迴旋積分 或 褶合運算)

$$f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(f(x))h(x-f_x)df_x$$

correlation (關聯運算)

$$f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(f(x))h(f_x-x)df_x$$

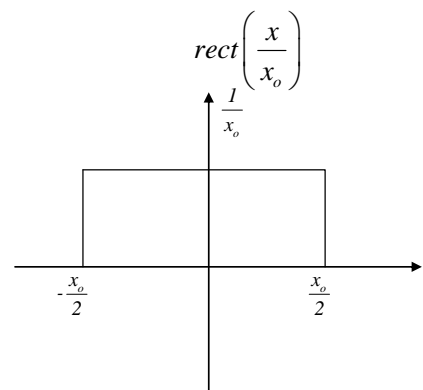
9. $F(f(x) * g(x)) = F(f_x)G(f_x)$

10. $F(f(x) * g(-x)) = F(f_x) * G(f_x)$

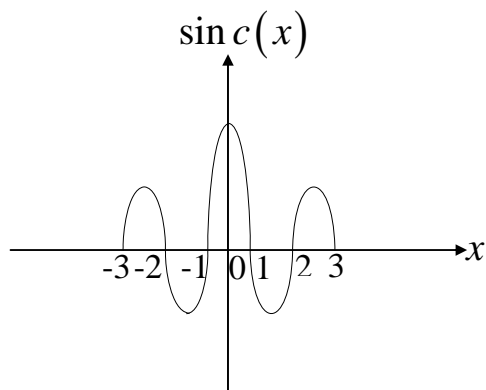
11. $F\{rect(x)\} = sinc(f_x)$

【註】 $rect\left(\frac{x}{x_o}\right)$ 定義如下：

$$rect\left(\frac{x}{x_o}\right) = \begin{cases} \frac{1}{x_o}, & -\frac{x_o}{2} \leq x \leq \frac{x_o}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

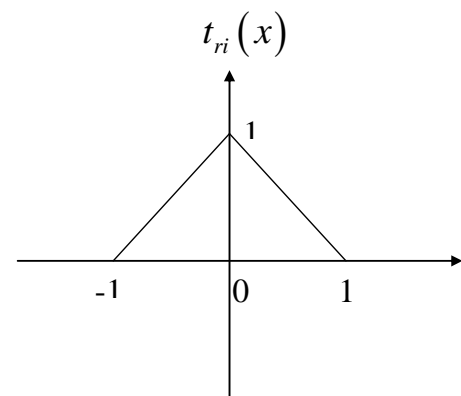


【註】 $sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$



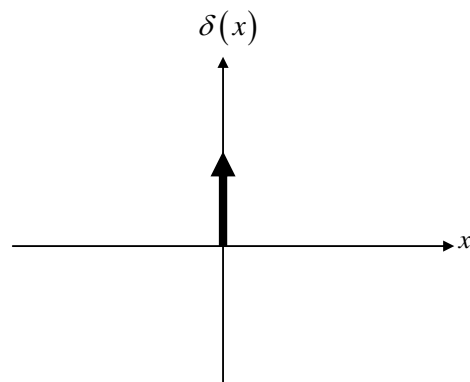
【註】 $t_{ri}(x)$

$$t_{ri}(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



【註】 $\delta(x)$: 脈衝函數

$$\delta(x) \text{ 可定義 } \delta(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \text{rect} \left(\frac{x}{x_0} \right)$$



21

12. $F\{\sin c(x)\} = \text{rect}(f_x)$

13. $F\{t_n(x)\} = \text{sinc}^2(f_x)$

14. $F\{\text{sinc}^2(x)\} = t_n(f_x)$

【註一】(5)式之證明：

$$\begin{aligned} \because F\{\cos(2\pi f_o x)\} &= F\left\{\frac{1}{2}(e^{j2\pi f_o x} + e^{j2\pi f_o x})\right\} \\ &= \frac{1}{2}[\delta(f_x + f_o) + \delta(f_x - f_o)] \end{aligned}$$

【註二】(6)式之證明：

$$\begin{aligned} \because F\{\sin(2\pi f_o x)\} &= F\left\{\frac{j}{2}(e^{-j2\pi f_o x} - e^{j2\pi f_o x})\right\} \\ &= \frac{j}{2}[\delta(f_x + f_o) - \delta(f_x - f_o)] \end{aligned}$$

22

Thanks

23