Chapter 11 兩母體參數的統計推論

李水彬

Chien Hsin University of Science and Technology

2014.02

本章的目的爲比較兩個母體的差異性。因爲平均數與變異數是一個母體分配的兩個重要參數，所以比較兩母體的差異上，自然就是發展比較兩母體平均數與變異數的差異性。我們可以說，若兩母體的平均數有差別或是變異數不同，表示這兩母體的分配是不同的。

我們常看到的例子有:

- 某工廠有兩條生產線, A 和 B 生產線, 品管人員或是工廠主管意欲探討兩條生產線的產品品質是否相同。
- 台北市與高雄市是台灣北部和南部兩個主要都市, 兩個城市民眾年平均消費是否相同, 它們之差異有多少呢?
- 本系學生有日間與進修部之分, 學生在學習成就上有無不同, 差異有多大呢?

- 有些父母喜歡讓小孩提早入學, 希望贏在起跑點上, 但真的如此嗎? 我們是否可以將入學年齡分成6歲到6歲半, 6歲半到7歲兩組, 看看未來兩組的表現比較好?
- 茶花, 油切, 分解茶··· 種種號稱有減肥效果的飲品, 它們有效嗎? 它們的效果有差異嗎? 這是兩個不同的問題, 針對第一個效果存在與否的問題, 通常是用減肥前 (使用前), 減肥後 (持續使用一段時間) 兩者體重的差異來比較。

兩種不同形式的樣本:

1. 獨立樣本 (independent samples): 抽樣的方法是在第一個母體抽出第一組樣本, 在第二母體抽出第二組樣本, 兩組樣本的決定毫無關係, 我們稱此為獨立樣本。
2. 成對樣本 (paired sample): 顧名思義, 成對是兩樣本的數據兩兩一對的, 這是在抽樣時將兩著視為同一個體的兩個不同量測數據。

Example

- 服用維生素 C 對縮短感冒時間的研究, 選定兩組受測者, 一爲實驗組, 另一爲對照組, 各有 n 和 m 人。實驗方式如下:
  - 實驗組: 感冒患者服用維生素 C
  - 對照組: 服用安慰劑
- 兩生產線的產品品質差異性比較研究, 兩條生產線各抽 n 和 m 產品, 測量它們的品質特性:
  - A 生產線: 第一條生產線 $X_1, \cdots, X_n$
  - B 生產線: 第二條生產線 $Y_1, \cdots, Y_m$

Example

從 A, B 生產線上分別抽驗 8 顆和 9 顆電池的壽命。欲比較兩生產線電池壽命有無差異?

A生產線的電池壽命 (小時)
49.1, 49.7, 46.8, 50.3, 52.3, 50.8, 51.6, 48.1

B 生產線的電池壽命 (小時)
46.7, 50.2, 53.7, 57.1, 48.6, 53.9, 53.5, 53.3, 51.9

♠

Example

- 減肥效果之研究: 研究者找來 n 個自願者, 在進入減肥療程前測量受測者的體重 (X : 減肥前體重), 經過一個月或一段時間後再測量他們的體重 (Y : 減肥後體重), 每一個受測者減肥前後的體重記錄如下:

$$(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n) \tag{1}$$

Example

- 降血壓藥的效果之研究: 同樣的, 研究者找來 個自願者, 先量服藥前血壓 (X : 服用前), 服藥後一段時間, 再量一次血壓 (Y: 服用後) 每一個受測者服藥前後的血壓記錄如式 (1):
- 左右手長度差異: 每一個人的左手與右手的長度都不一樣, (X : 左手長度, Y : 右手長度)

Example

- 男女朋友身高差異: 隨機抽出 n 對男女朋友 (X : 男生身高, Y : 女生身高)。
- 日夜溫差: 每天白天與晚上氣溫差異。(X : 白天氣溫, Y : 晚上氣溫)。
- 學生經過課後輔導機制成績的變化。(X : 課後輔導前的成績, Y : 課後輔導後的成績)。

Example

爲了評估實施課後輔導的成效, 比較參加 15 位參加統計學課後輔導學生的期中考成績與參與課後輔導後的成績, 成績記錄如下表:

♠

Table: 15位課後輔導前後的成績

編號	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
課後輔導前	35	42.5	30	35	47.5	35	17.5	60
課後輔導後	42	55	53	42	61	64	34	63
編號	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	
課後輔導前	25	30	27.5	22.5	45	65	20	
課後輔導後	47	48	60	50	66	68	49	

Example

統計學 A 組學生懷疑學生下午參與較多動態活動, 每分鐘心跳次數會比早上快, 故於某日隨機抽查 16 位學生, 測量這些學生早上 10 點與下午 3 點的心跳次數, 記錄於下表。

♠

Table: 16位學生在早上10點與下午3點每分鐘心跳次數

編號	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
早上	61	73	79	71	73	81	74	77
下午	70	78	80	77	75	80	79	78

編號	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
早上	59	68	57	61	62	59	60	63
下午	62	70	61	63	65	63	65	66

假設有兩個母體, 他們的平均值和變異數分別爲 μ_X, μ_Y 和 σ_X^2, σ_Y^2。本節將討論這兩個母體平均數差

$$\mu_X - \mu_Y$$

的統計推論, 分成估計和檢定兩個部份, 也就是如何得到這個差距的估計量與說明估計的精確度, 以及檢定這個差距是否明顯等。下一節則討論有關變異數的問題。

兩組隨機樣本的模型假設

$$\begin{aligned} X_1, \cdots, X_n &\overset{iid}{\sim} N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right) \\ Y_1, \cdots, Y_m &\overset{iid}{\sim} N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right) \end{aligned} \tag{2}$$

根據抽樣分配的理論，我們知

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{n}\right), \bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{m}\right) \tag{3}$$

- 在獨立樣本的條件下, 兩組隨機樣本的抽樣機制是分開互不影響的, 因此, 我們可以假設 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$ 是相互獨立的, 因此, 兩組樣本平均數的抽樣分配爲

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}\right) \tag{4}$$

因爲

$$E(\bar{X} - \bar{Y}) = \mu_X - \mu_Y$$

所以, $\bar{X} - \bar{Y}$ 爲兩個母體平均數差的不偏估計。

Example

接續例2, 請問估計 A, B 生產線所生產電池的平均壽命與平均壽命的差距。

解:

因爲

$$
\begin{aligned}
\bar{X} &= \frac{49.1+49.7+46.8+50.3+52.3+50.8+51.6+48.1}{8} \\
&= \frac{398.7}{8} = 49.8375 \\
\bar{Y} &= \frac{46.7+50.2+53.7+57.1+48.6+53.9+53.5+53.3+51.9}{9} \\
&= \frac{468.9}{9} = 52.1
\end{aligned}
$$

所以, B 生產線比 A 生產線多 2.2625 小時。 ♠

- 在成對樣本的條件下，兩組隨機樣本是在同一抽樣機共同得到的，所以，在式 (2) 中，$n = m$，但我們無法假設 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_n$ 是相互獨立的，因此，式(4) 是不成立的。我們將成對樣本表示成式 (1)，令

$$D_i = X_i - Y_i, i = 1, \cdots, n \tag{5}$$

爲第 i 個個體的兩個變數差，如一個人減肥前的體重減去減肥後的體重。

因爲隨機變數 D_i 的期望值

$$\mu_D = E(D_i) = E(X_i - Y_i) = \mu_X - \mu_Y, i = 1, \cdots, n \tag{6}$$

假設

$$D_1, \cdots, D_n \overset{iid}{\sim} N\left(\mu_D, \sigma_D^2\right) \tag{7}$$

所以,

$$\bar{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - Y_i}{n} \tag{8}$$

爲 $\mu_X - \mu_Y$ 的不偏估計。

Example

接續例7, 請求出每位學生下午 3 點早上 10 點心跳次數的差距, 並計算其樣本平均值。

Table: 16位學生在早上10點與下午3點每分鐘心跳次數與變化量

編號	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
早上 10 點	61	73	79	71	73	81	74	77
下午 3 點	70	78	80	77	75	80	79	78
差	**9**	**5**	**1**	**6**	**2**	**-1**	**5**	**1**
編號	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
早上 10 點	59	68	57	61	62	59	60	63
下午 3 點	62	70	61	63	65	63	65	66
差	**3**	**2**	**4**	**2**	**3**	**4**	**5**	**3**

$$\bar{D} = \frac{9+5+\cdots+5+3}{16} = \frac{54}{16} = 3.375$$

1. 母體常態，變異數已知假設兩個母體分配皆為常態，且母體標變異數 σ_X^2 和 σ_Y^2 已知，式 (4) 的標準化為

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0, 1) \tag{9}$$

因爲

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \tag{10}$$

推得

$$
\begin{aligned}
P\Bigg(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}} &\leq \bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y) \\
&< z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}\Bigg) \\
= 1-\alpha
\end{aligned}
\tag{11}
$$

所以,

$$P\left(\bar{X}-\bar{Y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}\leq\mu_X-\mu_Y\right.$$
$$\left.<\bar{X}-\bar{Y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}\right)=1-\alpha \tag{12}$$

當 $\bar{X} = \bar{x}, \bar{Y} = \bar{y}$ 時, 我們可以很容易得到 $\mu_X - \mu_Y$ 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間為

$$\left(\bar{x} - \bar{y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}, \bar{x} - \bar{y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}\right) \tag{13}$$

或者表示成

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} \tag{14}$$

Example

假設男女生每日講電話的時間皆爲常態分配, 標準差分別爲 40 和 30 秒。今調查5爲男生與6爲女生的一日通話時間, 資料如下:

男生 (X): 176, 141, 108, 170, 185,

女生 (Y): 175, 125, 145, 104, 135, 168

請問男女生一日平均講電話時間差的95%信賴區間爲何?

♠

1. 計算基本統計量。

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{176+141+108+170+185}{5} = 156 \\ \bar{Y} &= \frac{175+125+145+104+135+168}{6} = 142 \\ \bar{X}-\bar{Y} &= 156-142 = 14\end{aligned}$$

2. 查表 $\alpha = 0.05$, $z_{0.025} = 1.96$
3. 計算抽樣誤差:

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}} = 1.96\sqrt{\frac{40^2}{5}+\frac{30^2}{6}} = 42.5$$

4. 結論: 男女生一日平均講電話時間差 $\mu_X - \mu_Y$ 的 95% 信賴區間為

$$14 \pm 42.5$$

Example

接續例2 假設 A, B 兩生產線電池的壽命爲常態分配, 且標準差分別爲 2 和 3 小時。假設 A, B 兩生產線電池的平均壽命差的90%信賴區間爲何?

♠

令 X 代表 A 生產線電池的壽命且平均壽命爲 μ_A; Y 代表 B 生產線電池的壽命且平均壽命爲 μ_B。

1. 計算基本統計量。由例 8 知 $\bar{Y} - \bar{X} = 2.2625$。
2. 查表 $\alpha = 0.1$, $z_{0.05} = 1.645$
3. 計算抽樣誤差:

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} = 1.645\sqrt{\frac{2^2}{8} + \frac{3^2}{9}} = 2.015$$

4. 結論: $\mu_B - \mu_A$ 的90%信賴區間 (小時) 爲

$$2.2625 \pm 2.015$$

2 母體常態，變異數未知
當母體標變異數 σ_X^2 和 σ_Y^2 爲未知數，我們就必須用樣本變異數估計之，也就是用

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}, S_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2}{m-1} \tag{15}$$

分別估計 σ_X^2, σ_Y^2。

則 $\bar{X}-\bar{Y}$ 的標準化爲

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}}$$

但很不幸地，我們無法寫出這個標準化後的抽樣分配，以致於無法討論給定區間內的涵蓋機率值。這裡介紹一個常用的『近似』的結果。當兩母體爲常態分配，$\bar{X}-\bar{Y}$ 的標準化

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n}+\frac{S_Y^2}{m}}}\dot{\sim}\,t(v) \qquad (16)$$

其中 $\dot{\sim}$ 表示這是一個『近似』分配。

自由度爲

$$v = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{m-1}} \tag{17}$$

$\mu_X - \mu_Y$ 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間爲

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(v)\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}} \tag{18}$$

Example

接續例 10。請分別計算男女生每日講電話的時間的樣本變異數與樣本標準差。

♠

- 樣本變異數

$$
\begin{aligned}
S_X^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \\
&= \{(176-156)^2 + (141-156)^2 + (108-156)^2 \\
&+ (170-156)^2 + (185-156)^2\} \div 4 = 991.5 \\
S_Y^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2}{m-1} \\
&= \frac{(175-142)^2 + \cdots + (168-142)^2}{5} = 711.2
\end{aligned}
$$

- 樣本標準差

$$
\begin{aligned}
S_X &= \sqrt{991.5} = 31.45 \\
S_Y &= \sqrt{711.2} = 26.67
\end{aligned}
$$

Example

接續例 10。假設男女生每日講電話的時間皆爲常態分配，但母體標準差未知。請問男女生一日平均講電話時間差的 95% 信賴區間爲何？

♠

- 根據式 (17), 自由度爲

$$v = \frac{\left(\frac{991.5}{5} + \frac{711.2}{6}\right)^2}{\frac{\left(\frac{991.5}{5}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{711.2}{6}\right)^2}{5}} = 6.17 \tag{19}$$

四捨五入, 令 $v = 6$。

- 查表

$$\alpha = 0.05, t_{0.025}(6) = 2.4469$$

- 抽樣誤差

$$\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}} = \sqrt{\frac{991.5}{5} + \frac{711.2}{6}} = 17.80$$

$$E = 2.4469 \times 17.80 = 43.55$$

- 所以, 男女生平均講電話時間差的95%信賴區間爲

$$14 \pm 43.55$$

假設 $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, 雖然它們是未知的。改寫式 (4) 成

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right) \quad (20)$$

且$\bar{X} - \bar{Y}$ 的標準化爲

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \quad (21)$$

我們可以修正 σ_X^2 和 σ_Y^2 的估計方式。因爲它們是相同的，我們可以整合兩組樣本的資訊共同估計相同的變異數。令

$$S_P^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} \tag{22}$$

我們稱 S_P^2 爲 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$ 的合併樣本變異數 (pooled sample variance)。

用 S_P 取代式 (23) 的 σ, 可得$\bar{X} - \bar{Y}$ 的標準化後的分配爲

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_P\sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m}}} \sim t(n+m-2) \tag{23}$$

$\mu_X - \mu_Y$ 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間爲

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2}(n+m-2) s_P \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \tag{24}$$

Example

接續例12。請計算男女生講話時間合併後的樣本變異數與標準差。

♠

$$S_P^2 = \frac{4 \times 991.5 + 5 \times 711.2}{9} = 835.8$$

$$S_P = \sqrt{835.8} = 28.9$$

Example

接續例10。假設男女生每日講電話的時間皆爲常態分配，母體標準差未知但相等。請問男女生一日平均講電話時間差的95%信賴區間爲何?

♠

- 自由度爲 $v = 9$。
- 查表

$$\alpha = 0.05, t_{0.025}(9) = 2.2622$$

- 抽樣誤差

$$E = 2.2622 \times 28.9\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = 39.59$$

- 所以, 男女生平均講電話時間差的95%信賴區間爲

$$14 \pm 39.59$$

3 大樣本

當 $n \geq 30$ 且 $m \geq 30$, 根據中央極限定裡

$$\frac{\bar{X} - \mu_X}{S_X} \dot{\sim} N(0,1), \frac{\bar{Y} - \mu_Y}{S_Y} \dot{\sim} N(0,1) \quad (25)$$

所以,

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \dot{\sim} N(0,1) \quad (26)$$

$\mu_X - \mu_Y$ 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間為

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}} \tag{27}$$

4 成對樣本

當資料是成對如式 (1) 的型態, 我們定義式 (5) 為兩個變數的差距, 假設這差距的分配為式 (7), 則

$$\bar{D} \sim N\left(\mu_D, \frac{\sigma_D^2}{n}\right) \tag{28}$$

這簡化成與第十章單一母體平均數的統計推論完全相同。

應用上通常不假設 σ_D^2 是已知的，我們可以利用 $D_1, \cdots, D_n$ 的樣本變異數

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2}{n-1} \tag{29}$$

因此，

$$\frac{\bar{D} - \mu_D}{S_D} \sim t(n-1) \tag{30}$$

當 $\bar{D} = \bar{d}$時，$\mu_D = \mu_X - \mu_Y$ 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間爲

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_D}{\sqrt{n}} \tag{31}$$

Example

接續例9, 請求出每位學生下午 3 點早上 10 點平均心跳次數差的90%信賴區間。

♠

- D_i 值爲

  9, 5, 1 , 6, 2, -1, 5, 1, 3, 2, 4, 2, 3, 4, 5, 3

- $\bar{D} = 3.375, S_D^2 = 5.58, S_D = 2.36$
- 查表

$$\alpha = 0.1, v = 16 - 1 = 15, t_{0.05}(15) = 1.753$$

- 抽樣誤差

$$E = 1.753 \times 2.36/\sqrt{16} = 1.03$$

- 下午 3 點早上 10 點平均心跳次數差的90%信賴區間爲

$$3.375 \pm 1.03$$

三種檢定類型。

1. 單尾檢定 (one-sided test)
   - 右尾 (right-tailed) $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_\delta \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > \mu_\delta \end{cases}$
   - 左尾 (left-tailed) $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_\delta \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 < \mu_\delta \end{cases}$
2. 雙尾檢定 (two-sided test)

$$\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \mu_\delta \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_\delta \end{cases}$$

1. 母體常態, 變異數已知假設兩個母體分配皆爲常態, 且母體標變異數 σ_X^2 和 σ_Y^2 已知, 在 H_0 爲眞時, 將式 (4) 的標準化做爲檢定統計量得

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_\delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}+\frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0,1) \tag{32}$$

當給定顯著水準 α 時, 拒絕域爲

$$C=\left\{Z>z_{\alpha/2} \text{ 或 } Z<-z_{\alpha/2}\right\} \tag{33}$$

Table: 兩個母體平均數差之 Z 值法拒絕域

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
H_0	$\mu_1 - \mu_2 = \mu_\delta$	$\mu_1 - \mu_2 \geq \mu_\delta$	$\mu_1 - \mu_2 \leq \mu_\delta$
H_1	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$\begin{cases} Z < -z_{\alpha/2} \text{ 或} \\ Z > z_{\alpha/2} \end{cases}$	$Z < -z_\alpha$	$Z > z_\alpha$
α	$\alpha/2$	α	α

Example

接續例 10, 假設男女生每日講電話的時間皆爲常態分配, 標準差分別爲 40 和 30 秒。今調查5爲男生與 6 爲女生的一日通話時間, 資料如下:

男生 (X): 176, 141, 108, 170, 185,
女生 (Y): 175, 125, 145, 104, 135, 168

請問男女生一日平均講電話時間是否相等?
$(\alpha = 0.1)$

♠

假設 μ_1 代表男生每日通話的平均時間, μ_2 代表女生每日通話的平均時間。

1. 兩個假設 $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$, $(\mu_\delta = 0)$
2. 計算檢定統計量。

$$\bar{X} - \bar{Y} = 156 - 142 = 14$$

$$\sqrt{\frac{40^2}{5} + \frac{30^2}{6}} = 21.68$$

$$Z = \frac{14 - 0}{21.13} = 0.65$$

3. 拒絕域 $\alpha = 0.1$, $z_{0.05} = 1.645$

$$C = \{Z > 1.645 \text{ 或 } Z < -1.645\}$$

4. 結論: 因為 $Z = 0.65$ 不落在 C 內, 故無法拒絕 H_0, 證據不足說明男女講電話的平均時間有差異。

Example

接續例17 假設 A, B 兩生產線電池的壽命爲常態分配, 且標準差分別爲 2 和 3 小時。請問 B 生產線電池的平均壽命是否大於 A 生產線電池的平均壽命? $(\alpha = 0.05)$

♠

令 X 代表 A 生產線電池的壽命且平均壽命爲 μ_A; Y 代表 B 生產線電池的壽命且平均壽命爲 μ_B。

1. 兩個假設 $\begin{cases} H_0: & \mu_B - \mu_A \leq 0 \\ H_1: & \mu_B - \mu_A > 0 \end{cases}$
2. 計算檢定統計量。

$$\bar{X} - \bar{Y} = 2.2625$$

$$\sqrt{\frac{2^2}{8} + \frac{3^2}{9}} = 1.225$$

$$Z = \frac{2.2625 - 0}{1.225} = 1.85$$

3. 拒絕域 $\alpha = 0.05$, $z_{0.05} = 1.645$

$$C = \{Z > 1.645\}$$

4. 結論: 因為 $Z = 1.85$ 落在 C 內, 故拒絕 H_0 , 顯示 B 生產線電池的平均壽命大於 A 生產線電池的平均壽命。

2 母體常態，變異數未知

當母體標變異數 σ_X^2 和 σ_Y^2 爲未知數，我們就必須用樣本變異數估計之，式 (32) 的檢定統計量修正爲

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_\delta}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \dot{\sim} t(v)$$

自由度 v 請參見式 (17)。當給定顯著水準 α 時，拒絕域爲

$$C = \{T > t_{\alpha/2}(v) \text{ 或 } T < -t_{\alpha/2}(v)\} \quad (34)$$

Example

接續例17。假設男女生每日講電話的時間皆爲常態分配，但母體標準差未知。請問男女生一日平均講電話時間是否相等？ $(\alpha = 0.1)$

♠

1. 兩個假設 $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$, $(\mu_\delta = 0)$
2. 計算檢定統計量。

$$\bar{X} - \bar{Y} = 156 - 142 = 14$$

$$\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}} = \sqrt{\frac{991.5}{5} + \frac{711.2}{6}} = 17.80$$

$$T = \frac{14 - 0}{17.80} = 0.79$$

3. 拒絕域 $\alpha = 0.1$, $v = 6$, $t_{0.05}(6) = 1.9432$

$$C = \{T > 1.9432 \text{ 或 } T < -1.9432\}$$

4. 結論: 因爲 $T = 0.79$ 不落在 C 內, 故無法拒絕 H_0 , 證據不足說明男女講電話的平均時間有差異。

若 $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$, 則檢定統計量爲

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_\delta}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2) \tag{35}$$

當給定顯著水準 α 時, 拒絕域爲

$$C = \{T > t_{\alpha/2}(n+m-2) \text{ 或 } T < -t_{\alpha/2}(n+m-2)\} \tag{36}$$

Example

接續例 19。假設男女生每日講電話的時間皆爲常態分配，母體標準差未知但相等。請問男女生一日平均講電話時間是否相等？ $(\alpha = 0.1)$

♠

檢定統計量爲

$$T = \frac{14 - 0}{28.89\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}} = \frac{14}{17.5} = 0.8$$

$$\alpha = 0.1, t_{0.05}(9) = 1.833$$

拒絕域

$$C = \{T > 1.833 \text{ 或 } T < -1.833\}$$

結論: 因爲 $T = 0.8$ 不落在 C 內, 故無法拒絕 H_0 , 證據不足說明男女講電話的平均時間有差異。

3. 大樣本
當 $n \geq 30$ 且 $m \geq 30$, 根據中央極限定裡檢定統計量爲

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_\delta}{\sqrt{\dfrac{S_X^2}{n} + \dfrac{S_Y^2}{m}}} \dot{\sim} N(0,1)$$

4 成對樣本

兩個假設爲 $\begin{cases} H_0: & \mu_D = \mu_\delta \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_\delta \end{cases}$ 檢定統計量爲

$$T_D = \frac{\bar{D} - \mu_\delta}{S_D} \sim t(n-1) \tag{37}$$

當給定顯著水準 α 時, 拒絕域爲

$$C = \{T_D > t_{\alpha/2}(n-1) \text{ 或 } T_D < -t_{\alpha/2}(n-1)\} \tag{38}$$

Example

接續例16, 請問學生下午 3 點平均心跳是否高於早上 10 點的平均心跳次數? ($\alpha = 0.05$)。

♠

令 μ_D 代表下午 3 點與早上 10 點的平均心跳次數差。D_i 值爲

9, 5, 1 , 6, 2, -1, 5, 1, 3, 2, 4, 2, 3, 4, 5, 3

1. 兩個假設 $\begin{cases} H_0: & \mu_D \leq 0 \\ H_1: & \mu_D > 0 \end{cases}$
2. 計算檢定統計量。

$$T = \frac{3.375 - 0}{2.36/\sqrt{16}} = 5.72$$

3. 拒絕域 $\alpha = 0.05$, $v = 15$, $t_{0.025}(15) = 2.1314$

$$C = \{T > 2.1314 \text{ 或 } T < -2.1314\}$$

4. 結論: 因爲 $T = 5.72$ 落在 C 內, 故拒絕 H_0 , 表學生下午 3 點平均心跳是高於早上 10 點的平均心跳次數。

我們以兩個變異數的比值 $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 的大小來表現它們的差異性。若是兩個變異數沒有差別, 其比值應爲1; 若小於1表示第一個母體變異數較小, 若大於1表示第二個母體變異數較小。

- 兩個樣本變異數的比值 $\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$ 就是母體變異數比值 $\dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 的估計。
- 接著的問題就是 $\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$ 的抽樣分配爲何? 有抽樣分配才能平均信賴區間的涵蓋機率與統計檢定的型 I 與型 II 錯誤。

定理

假設 $X_1 \sim \chi^2(v_1)$, $X_2 \sim \chi^2(v_2)$ 且 X_1, X_2 相互獨立, 則

$$\frac{X_1/v_1}{X_2/v_2} \sim F(v_1, v_2) \tag{39}$$

$F(v_1, v_2)$ 爲 F 分配的表示, 分子自由度爲 v_1 和分母自由度 v_2。

¶

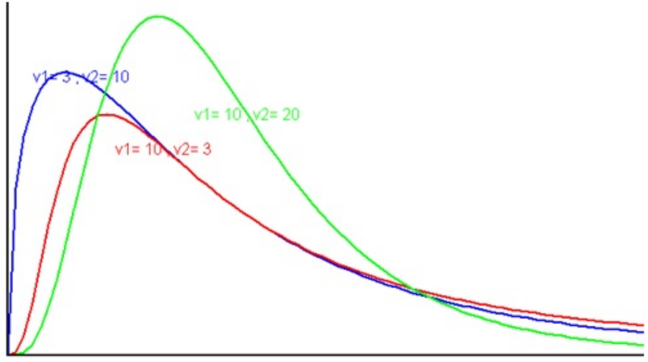

圖: F分配的機率分配圖形 (v1爲分子自由度, v2爲分母自由度)

性質

假設 $X \sim F(v_1, v_2)$, 則 F 分配的期望值與變異數爲

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{v_2}{v_2 - 2}, v_2 > 2 \\ Var(X) &= \frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 2)^2(v_2 - 4)}, v_2 > 4 \\ \text{衆數} &= \frac{v_1 - 2}{v_1}\frac{v_2}{v_2 + 2} \end{aligned} \tag{40}$$

圖 1 爲三條 F 的機率分配圖行, v1爲分子自由度, v2 爲分母自由度, 皆爲右偏分配。我們注意到 F 分配的期望值爲 $\dfrac{v_2}{v_2-2} > 1$ 僅與分母自由度 v_2 有關且大於1, 而衆數必定小於 1, 根據皮爾生經驗法則, 不管 v_1, v_2 爲何, F 都是一個右偏分配。

假設 $X_1, \cdots, X_n \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ 且 $Y_1, \cdots, Y_m \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$, 我們已知

$$\frac{(n-1)S_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(n-1), \frac{(m-1)S_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(m-1)$$

所以, 我們可以得到以下的結果

定理

當資料都是來自於常態母體, 而且兩個樣本相互獨立, 則

$$\frac{S_X^2/\sigma_X^2}{S_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(n-1, m-1) \tag{41}$$

¶

注意, 兩樣本變異數比的抽樣分配僅適用於獨立樣本, 成對樣本並非相互圖獨立故無法使用這個定理。因此, 有關變異數比的統計推論我們僅介紹獨立樣本的部分。

定義

假設 $X \sim F(v_1, v_2)$, 其臨界值 $F_\alpha(v_1, v_2)$ 滿足

$$P\left(X > F_\alpha(v_1, v_2)\right) = \alpha \tag{42}$$

¶

根據式 (42),

$$P\left(X > F_{1-\alpha}(v_1, v_2)\right) = 1 - \alpha$$

所以,

$$P\left(X < F_{1-\alpha}(v_1, v_2)\right) = \alpha \tag{43}$$

圖2右邊藍色面積 (機率) 為 α, X 軸臨界點為 $F_\alpha(v_1, v_2)$, 左邊藍色面積 (機率) 為 α, X 軸臨界點為 $F_{1-\alpha}(v_1, v_2)$, 大於 $F_{1-\alpha}(v_1, v_2)$ 的機率為 $1-\alpha$。

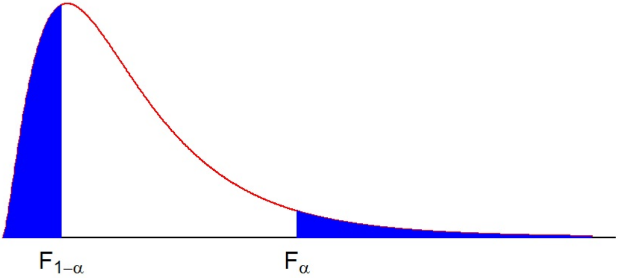

圖: F分配的臨界值

性質

假設 $X \sim F(v_1, v_2)$,

$$\frac{1}{X} \sim F(v_2, v_1) \tag{44}$$

換言之, X 和 $1/X$ 同爲 F 分配, 但分子和分母自由度交換。

¶

因爲

$$P\left(X > F_\alpha(v_1, v_2)\right) = \alpha$$

推得

$$P\left(\frac{1}{X} < \frac{1}{F_\alpha(v_1, v_2)}\right) = \alpha$$

與式 (43) 比較, 因爲 $\frac{1}{X} \sim F(v_2, v_1)$ 可得以下重要性質:

性質

$$F_{1-\alpha}(v_2, v_1) = \frac{1}{F_\alpha(v_1, v_2)}$$

Example

查出以下 F 的臨界值。

- $F_{0.05}(5,6) =$________________
- $F_{0.95}(5,6) =$________________
- $F_{0.975}(4,5) =$________________

♠

Example

假設 $X \sim F(v_1, v_2)$ 請回答以下問題:

- $P\left(X > F_{0.1}(v_1, v_2)\right) =$ ________________
- $P\left(X < F_{0.95}(v_1, v_2)\right) =$ ________________
- $P\left(F_{0.75}(v_1, v_2) < X < F_{0.05}(v_1, v_2)\right) =$ ________________

♠

由定理3.2, 得

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \sim F(n-1, m-1) \tag{45}$$

根據臨界值的定義,

$$P\left(F_{1-\alpha/2}(v_1, v_2) < \frac{S_X^2}{S_Y^2}\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} < F_{\alpha/2}(v_1, v_2)\right) = 1-\alpha \tag{46}$$

如圖3所示, 中間區域面積爲 $1-\alpha$。

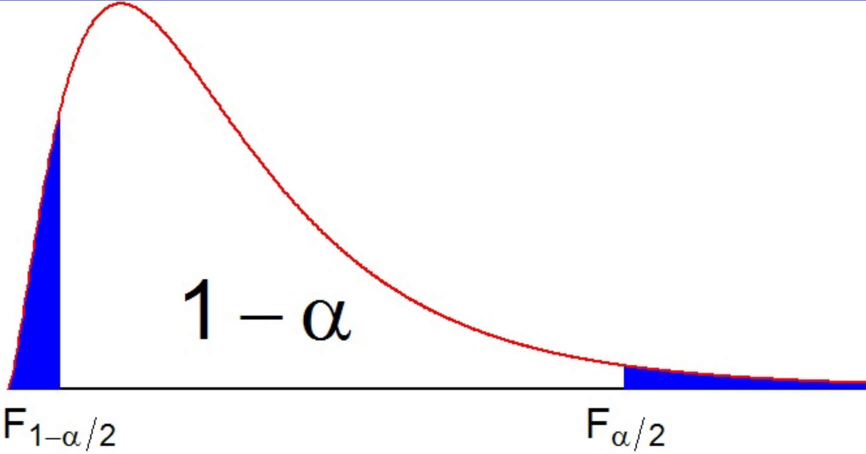

圖: $P\left(F_{1-\alpha/2}(v_1, v_2) < X < F_{\alpha/2}(v_1, v_2)\right) = 1 - \alpha$ 的區域

整理式 (46) 得

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(v_1,v_2)} > \frac{S_Y^2}{S_X^2}\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > \frac{1}{F_{\alpha/2}(v_1,v_2)}\right) = 1-\alpha \\
P\left(\frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{1-\alpha/2}(v_1,v_2)} > \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > \frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{\alpha/2}(v_1,v_2)}\right) = 1-\alpha \\
P\left(\frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{\alpha/2}(v_1,v_2)} < \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} < \frac{S_X^2/S_Y^2}{F_{1-\alpha/2}(v_1,v_2)}\right) = 1-\alpha
\end{aligned}
\tag{47}
$$

所以, 兩母體變異數比 $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間 爲

$$
\left(\frac{s_X^2/s_Y^2}{F_{\alpha/2}(v_1,v_2)}, \frac{s_X^2/s_Y^2}{F_{1-\alpha/2}(v_1,v_2)}\right) \tag{48}
$$

Example

接續例 12。請求出變異數比的 95% 信賴區間。

♠

- 樣本變異數比
因爲

$$
\begin{aligned}
S_X^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1} \\
&= \{(176-156)^2+(141-156)^2+(108-156)^2 \\
&+ (170-156)^2+(185-156)^2\} \div 4 = 991.5 \\
S_Y^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{m-1} \\
&= \frac{(175-142)^2+\cdots+(168-142)^2}{5} = 711.2
\end{aligned}
$$

所以,

$$
\frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{991.5}{711.2} = 1.394
$$

- 查表, $\alpha = 0.05$, $n-1=4$, $m-1=5$

$$\begin{aligned} F_{0.025}(4,5) &= 7.3879 \\ F_{0.975}(4,5) &= \frac{1}{F_{0.025}(5,4)} = \frac{1}{9.3645} = 0.1067 \end{aligned}$$

- 變異數比的95%信賴區間爲

$$\left(\frac{1.394}{7.3879}, \frac{1.394}{0.1067}\right) = (0.189, 13.065)$$

Example

假設某公司欲比較二條不同生產線 A,B 之產品穩定性, 令隨機抽取 A 生產線 25 件及 B 生產線 16 件產品作檢查, 發現 A 生產線生產之 25 件產品重是之變異數 36;B 生產線之 16 件產品重量之變異數爲 30。請問此兩條生產線變異數比之90%信賴區間爲何?

♠

- 樣本變異數比

$$\frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{36}{30} = 1.2$$

- 查表, $\alpha = 0.05$, $n-1 = 24$, $m-1 = 15$

$$\begin{aligned} F_{0.05}(24, 15) &= 2.2878 \\ F_{0.95}(24, 15) &= \frac{1}{F_{0.05}(15, 24)} = \frac{1}{2.1077} = 0.4745 \end{aligned}$$

- 變異數比 $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的90%信賴區間為

$$\left(\frac{1.2}{2.2878}, \frac{1.2}{0.4745} \right) = (0.525, 2.529)$$

三種檢定類型。

1. 單尾檢定 (one-sided test)
   - 右尾 (right-tailed) $\begin{cases} H_0: & \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \rho \\ H_1: & \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \rho \end{cases}$
   - 左尾 (left-tailed) $\begin{cases} H_0: & \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq \rho \\ H_1: & \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \rho \end{cases}$
2. 雙尾檢定 (two-sided test) $\begin{cases} H_0: & \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \rho \\ H_1: & \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \rho \end{cases}$

其中 ρ 兩變異數比值的參考值, 通成 $\rho = 1$。根據式 (50), 當 H_0 爲眞時, 檢定統計量的抽樣分配爲

$$F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2}/\rho \sim F(n-1, m-1) \tag{49}$$

若 $\rho = 1$, 減化為

$$F_0 = \frac{S_X^2}{S_Y^2} \sim F(n-1, m-1) \tag{50}$$

當給定顯著水準 α 時, 拒絕域爲

$$
\begin{aligned}
C &= \{F_0 > F_{\alpha/2}(n-1, m-1) \text{ 或 } \\
&\quad F_0 < F_{1-\alpha/2}(n-1, m-1)\} \\
&= \{F_0 > F_{\alpha/2}(n-1, m-1) \text{ 或 } \\
&\quad F_0 < \frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)}\Big\}
\end{aligned} \tag{51}
$$

Example

接續例 27, 假設某公司欲比較二條不同生產線 A,B 之產品穩定性, 令隨機抽取 A 生產線 25 件及 B 生產線 16 件產品作檢查, 發現 A 生產線生產之 25 件產品重是之變異數 36;B 生產線之 16 件產品重量之變異數爲 30。請問此兩條生產線變異數比是否等於 1? $(\alpha = 0.05$

♠

1. 兩個假設 $\begin{cases} H_0: & \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} = 1 \\ H_1: & \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \neq 1 \end{cases}$
2. 計算檢定統計量。

$$F_0 = \frac{36}{30} = 1.2$$

3 拒絕域 查表, $\alpha = 0.05$, $n-1=24, m-1=15$

$$\begin{aligned} F_{0.05}(24,15) &= 2.2878 \\ F_{0.95}(24,15) &= \frac{1}{F_{0.05}(15,24)} = \frac{1}{2.1077} = 0.4745 \end{aligned}$$

$$C = \{F_0 > 2.28782 \text{ 或 } F_0 < 0.4775\}$$

4 結論: 因爲 $F_0 = 1.2$ 不落在 C 內, 故無法拒絕 H_0 , 故可以接受兩條生產線的穩定度相同。

現在我們已經學會足夠的工具來解決例 2 電池壽命差的問題, 爲了方便讀者閱讀, 僅將數據複貼於下。

A生產線的電池壽命 (小時)
49.1, 49.7, 46.8, 50.3, 52.3, 50.8, 51.6, 48.1

B 生產線的電池壽命 (小時)
46.7, 50.2, 53.7, 57.1, 48.6, 53.9, 53.5, 53.3, 51.9

經過計算可得, A, B 兩組樣本的樣本平均數與變異數分別爲

$$\bar{X} = 49.8375, \bar{Y} = 52.1$$

$$S_A^2 = 3.303, S_B^2 = 9.9075$$

設立兩個假設爲

$$\begin{cases} H_0: & \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2} = 1 \\ H_1: & \dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2} \neq 1 \end{cases}$$

檢定統計量

$$F_0 = \frac{3.303}{9.9075} = 0.33$$

考慮顯著水準 $\alpha = 0.1$, 查表得

$$F_{0.05}(7,8) = 3.5005, F_{0.95}(7,8) = 0.2684$$

拒絕域

$$C = \{F_0 > 3.5005 \text{ 或 } F_0 < 0.2684\}$$

因爲 $F_0 = 0.333$ 不落在 C 內, 故無法拒絕 H_0 , 故我們可以假設電池壽命的變異數是相等的。合併樣本變異數

$$S_P^2 = \frac{7 \times 3.303 + 8 \times 9.9075}{15} = 6.8254,$$

$$S_P = \sqrt{6.8254} = 2.61$$

關於電池壽命平均數差的檢定, 我們考慮檢定統計量爲

$$T = \frac{49.8375 - 52.1}{2.61\sqrt{1/8 + 1/9}} = -1.7834$$

因爲 $t_{0.025}(15) = 2.131$, 拒絕域爲

$$C = \{t > 2.131 \text{ 或 } t < -2.131\}$$

無法證實兩條生產線的平均壽命有明顯差距。

假設 μ_D 代表課後輔導後學生平均成績的增加量, 則兩個假設爲

$$\begin{cases} H_0: & \mu_D \leq 10 \\ H_1: & \mu_D > 10 \end{cases}$$

Table: 15位課後輔導前後的成績與變化量

編號	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
輔導前	35	42.5	30	35	47.5	35	17.5	60
輔導後	42	55	53	42	61	64	34	63
差	**7**	**12.5**	**23**	**7**	**13.5**	**29**	**16.5**	**3**

編號	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	
輔導前	25	30	27.5	22.5	45	65	20	
輔導後	47	48	60	50	66	68	49	
差	**22**	**18**	**32.5**	**27.5**	**21**	**3**	**29**	

因爲

$$\bar{D} = 17.6, S_D = 9.77$$

檢定統計量爲

$$t = \frac{\bar{D} - \mu_\delta}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{17.6 - 10}{9.77/\sqrt{15}} = 3.01$$

$t_{0.05}(15) = 1.753$, 拒絕域爲

$$C = \{t > 1.753\}$$

因此, 證據足以拒絕 H_0, 表示課後輔導績效顯著。

假設我們在兩條生產線各檢測 $n \geq$ 和 $m \geq$ 個產品, 分別用 $X_1, \cdots, X_n$和 $Y_1, \cdots, Y_m$。根據第10章, 樣本比例的抽樣分配分別爲

$$\begin{aligned}
\hat{p}_A &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N\left(p_A, \frac{p_A(1-p_A)}{n}\right) \\
\hat{p}_B &= \frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i}{m} \sim N\left(p_B, \frac{p_B(1-p_B)}{m}\right)
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\hat{p}_A - \hat{p}_B \sim N\left(p_A - p_B, \frac{p_A(1-p_A)}{n} + \frac{p_B(1-p_B)}{m}\right) \tag{53}$$

事實上, 兩個母體比例差 $p_A - p_B$ 爲兩個母體平均數差的特例, 故用平均數差的統計推論即可得到 $p_A - p_B$ 的 $(1-\alpha)100\%$ 信賴區間爲

$$\hat{p}_A - \hat{p}_B \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n} + \frac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{m}} \tag{54}$$

Example

假設某公司欲比較二條不同生產線 A,B 良率, 令隨機抽取 A 生產線 100 件及 B 生產線 200 件產品作檢查, 良率分別爲 0.9 和 0.88。請問此兩條生產線良率差之90%信賴區間爲何?

♠

- 樣本比例差

$$\hat{p}_A - \hat{p}_B = 0.9 - 0.88 = 0.02$$

- 查表, $\alpha = 0.05$, $z_{0.025} = 1.96$
- 抽樣誤差

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n} + \frac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{m}}$$

$$= 1.96\sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{100} + \frac{0.88 \times 0.12}{200}} = 0.074$$

- 兩條生產線良率差之90%信賴區間爲

$$0.02 \pm 0.074$$

兩個母體比例差的虛無假設類型共有三種, 如表 6, 我們以雙尾檢定爲

$$\begin{cases} H_0: & p_A - p_B = p_d \\ H_1: & p_A - p_B = p_d \end{cases}$$

p_d 爲兩個母體比例差的參考值。統計量 $\hat{p}_A - \hat{p}_B$ 的標準化爲

$$Z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B - p_d}{\sqrt{\frac{p_A(1-p_A)}{n} + \frac{p_B(1-p_B)}{m}}} \sim N(0,1) \quad (55)$$

因爲 $\sqrt{\dfrac{p_A(1-p_A)}{n}+\dfrac{p_B(1-p_B)}{m}}$ 是未知的, 故 H_0 的假設下, 可以用 $\sqrt{\dfrac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n}+\dfrac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{m}}$ 估計之, 檢定統計量爲

$$Z=\frac{\hat{p}_A-\hat{p}_B-p_d}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n}+\dfrac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{m}}}\sim N(0,1) \quad (56)$$

若 $p_d = 0$, 即兩個假設爲

$$\begin{cases} H_0: & p_A - p_B = 0 \\ H_1: & p_A - p_B \neq 0 \end{cases}$$

可令 $\hat{p} = \dfrac{n \times \hat{p}_A + m \times \hat{p}_B}{n+m}$, 設檢定統計量爲

$$Z = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B - 0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} \sim N(0,1) \tag{57}$$

Table: 兩個母體比例差之 Z 值法拒絕域

	雙尾檢定	左尾檢定	右尾檢定
H_0	$p_A - p_B = p_d$	$p_A - p_B \geq p_d$	$p_A - p_B \leq p_d$
H_1	$\neq$	$<$	$>$
拒絕域	$Z < -z_{\alpha/2}$ 或 $Z > z_{\alpha/2}$	$Z < -z_{\alpha}$	$Z > z_{\alpha}$
α	$\alpha/2$	α	α

Example

接續例27 假設某公司欲比較二條不同生產線 A,B 良率, 令隨機抽取 A 生產線 100 件及 B 生產線 200 件產品作檢查, 良率分別爲 0.9 和 0.88。請問此兩條生產線良率是否相等? $(\alpha = 0.05)$

♠

- 兩個假設為

$$\begin{cases} H_0: & p_A - p_B = 0 \\ H_1: & p_A - p_B \neq 0 \end{cases}$$

- 檢定統計量

$$\hat{p}_A - \hat{p}_B = 0.9 - 0.88 = 0.02$$

$$\hat{p} = \frac{100 \times 0.9 + 200 \times 0.88}{300} = 0.887$$

$$Z = \frac{0.02 - 0}{\sqrt{0.887 \times 0.113 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{200}\right)}} = 0.53$$

- 查表, $\alpha = 0.05$, $z_{0.025} = 1.96$
- 拒絕域

$$C = \{Z > 1.96 \text{ 或 } Z < -1.96\}$$

- 結論: 因爲 $Z = 0.53$, 不落在 C 故無法拒絕 H_0, 無法證明兩條生產線良率不相等。